Fourier 展開

Coulomb相互作用の

U(r) を平面波で展開.

$$\begin{cases} U(r) = \dfrac{1}{V}\displaystyle\sum_{q} v(q)\, e^{iq r} \\ v(q) = \displaystyle\int_{\Omega} U(r)\, e^{-iq\cdot r} \end{cases}$$

q と r のなす角 θ として.

$$q\cdot r = qr\cos\theta$$

$$v(q) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} U(r) r^2 dr \int_0^{\pi} e^{iqr\cos\theta} \sin\theta\, d\theta$$ $x=\cos\theta$ として変換.

$$= 2\pi \int_0^{\infty} U(r) r^2 dr \int_{-1}^{1} e^{iqrx} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} U(r) r^2 dr\ \frac{e^{iqr}-e^{-iqr}}{iqr} = \frac{4\pi}{q}\int_0^{\infty} U(r)\, r \sin qr\, dr$$

今, $U(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r}\cdot e^{-kr}$ (Yukawa potential) のとき. screened potential.

$$v(q) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 q}\int_0^{\infty} e^{-kr}\sin qr\, dr = \frac{e^2}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{k^2+q^2}$$ となる.

一方, $v(q) = \dfrac{e^2}{\varepsilon_0 q^2}$ 逆変換すると.

$$U(r) = \frac{e^2}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\int \frac{e^{iq\cdot r}}{q^2} dq = \frac{e^2}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_0^{\infty} dq \int_0^{\pi} e^{iqr\cos\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{e^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\sin qr}{q}dq}_{\frac{\pi}{2}}$$

よって, $U(r) = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ となる.

コメント $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega^2}d\omega = \frac{\pi t}{2}$ (大切な積分)

WKB 近似 Wentzel - Kramers - Brillouin

一次元 $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)-E\right]\psi(x)=0$

解 $\psi(x)=e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$ とする

このとき. $-i\hbar\psi'=S'\psi$
$-\hbar\psi''=(-i\hbar S''+S'^2)\psi$ となる.

$$\rightarrow \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\right]+V-E=0 \quad ☆$$

$\hbar\to 0$ において、ハミルトンヤコビ方程式となる.

$S(x)=S_0(x)+(-i\hbar)S_1(x)+(-i\hbar)^2S_2(x)+\cdots$ と摂動展開する.

$$\frac{-i\hbar}{2m}\left[\frac{d^2S_0}{dx^2}+(-i\hbar)\frac{d^2S_1}{dx^2}+\cdots\right]+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+2(-i\hbar)\frac{dS_1}{dx}\frac{dS_0}{dx}+\cdots\right]+V-E=0$$

$\hbar$の次数ごとに成立する.

$\hbar^0$次 : $\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0(x)}{dx}\right)^2+V(x)-E=0$ ① ← HJ eq.

$\hbar^1$次 : $\frac{d^2S_0(x)}{dx^2}+2\frac{dS_0(x)}{dx}\frac{dS_1(x)}{dx}=0$ ②

⋮

$E>V(x)$ において. $S_0(x)=\pm\int^x dx'\,p(x')$, $p(x)=\sqrt{2m(E-V(x))}$

$S_0(x)$が求まれば ② より

$$S_1(x)=\ln|p(x)|^{-\frac{1}{2}}+C$$

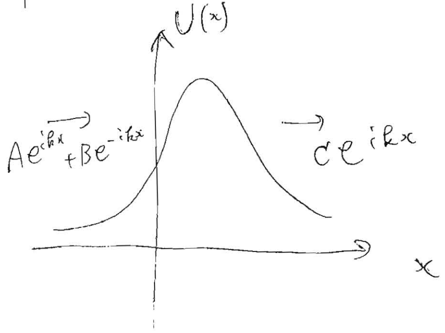
よって. $\hbar$の1次までで. $\psi(x)\cong\frac{C_-}{\sqrt{p(x)}}e^{\frac{i}{\hbar}\int_{x_0}^x p(x')dx'}+\frac{C_+}{\sqrt{p(x)}}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{x_0}^x p(x')dx'}$
(準古典近似)

この近似が成り立つ条件は. $\hbar|S''|\ll|S'|^2$ のときである ← ☆

$$\left|\hbar\frac{p'}{p^2}\right|=\left|\frac{d\lambda}{dx}\right|\ll 1 \qquad \left(\lambda=\frac{\hbar}{p}\right)$$

つまり. 考えている領域で. 波長λの変化が. 十分にゆるやかである必要がある.

トンネル効果



透過率 $T=\dfrac{|C|^2}{|A|^2}=\exp\left[-\dfrac{2}{\hbar}\int\sqrt{2m(U(x)-E)}\cdot dx\right]$

ハミルトンヤコビの解法

自由粒子 $\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2$

$S = T(t) + W(q)$ として、 $\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 \equiv -P$ とおく。

$T(t) = \cancel{-Pt} = -P\cdot t$

$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = P \longrightarrow W = \sqrt{2mP}\cdot q$

よって $S(q, P, t) = \sqrt{2mP}\cdot q - P\cdot t$

P, Q 正準座標

正準変換

$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mP}$, $\quad P = \frac{p^2}{2m}$

$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \sqrt{\frac{m}{2P}}\cdot q - t \longrightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m}}(t+Q)$

Q は、$t=0$ のとき x_0 として $Q = \sqrt{\frac{m}{2P}}\cdot x_0$

調和振動子

$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right) = 0$

$S(q, t) = W(q) - Et$ とする。

$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2 - 2mE = 0 \longrightarrow W(q, E) = \int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}\cdot dq$

よって $S(q, E, t) = \int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}\cdot dq - Et$

$Q = \frac{\partial S(q, E, t)}{\partial E} = \frac{\partial W(q, E)}{\partial E} - t$ である。 $\frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{m}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}} dq$

$= \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\cdot q\right) = t + Q$

$\left(\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x\right)$

よって $q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\cdot \sin\omega(t+Q)$

ゲージ不変性.

$(\mathbb{E}, \mathbb{B}) \to (\phi, \mathbb{A})$

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\\ \mathbb{B} &= \nabla \times \mathbb{A}\end{aligned}\right)$$ を満たすと.

$$\phi \to \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$
$$\mathbb{A} \to \mathbb{A} + \nabla\Lambda$$

の下でLは不変となる.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - q\phi(t, r) + q\dot{r}\cdot\mathbb{A}(t, r)$$ とおく

ゲージ変換の下で

$$L \to L + q\left(\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(t, r(t)) + \frac{dr(t)}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial r(t)}\Lambda(t, r(t))\right)$$ と変化する

$$\to L + \frac{d}{dt}\left(q\Lambda(t, r(t))\right)$$ とまとめられる.

始点終点を固定した作用積分に表れない.

$$H = \sum_i p_i\dot{r} - L$$
$$= \frac{1}{m}p(p-eA) - \left(\frac{1}{2m}(p-eA)^2 + \frac{q}{m}(p-eA)A - q\phi\right)$$

また. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + qA$ より

$$H = p\cdot\dot{r} - L = \frac{1}{2m}(p - qA)^2 + q\phi$$ となる.

Lagrange eq. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r} + qA) + q\nabla\phi - q\nabla(\dot{r}\cdot A) = 0$

$\dot{r}\times\mathbb{B} = \nabla(\dot{r}\cdot A) - (\dot{r}\cdot\nabla)\mathbb{A}$ を用いる.

$$m\ddot{r} = -q\nabla\phi + q\nabla(\dot{r}\cdot A) - q\frac{dA}{dt}$$
$$= q\left(\mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right) + q\left\{\dot{r}\times\mathbb{B} + (\dot{r}\cdot\nabla)\mathbb{A}\right\} - q\frac{dA}{dt}$$
$$= q(\mathbb{E} + \dot{r}\times\mathbb{B})$$

電磁場中の運動方程式となる

経路積分

$$\hat{q}(t)\,|t,q\rangle = q\,|t,q\rangle$$

$$|t,q\rangle = e^{i\hat{H}t}\,|q\rangle$$

$$\psi(t_b, q_b) = \langle q_b|\, e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar}\,|\psi(t_a)\rangle \qquad t_b > t_a$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \langle q_b| e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)/\hbar} |q_a\rangle\langle q_a|\psi(t_a)\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \langle t_b, q_b | t_a, q_a\rangle \psi(t_a, q_a)$$

$$\langle t_b, q_b | t_a, q_a\rangle = \int dq_1 \cdots \int dq_{N-1} \langle t_b, q_b | t_{N-1}, q_{N-1}\rangle \cdots \langle t_1, q_1 | t_a, q_a\rangle$$ となる。☆

$$\langle t_i\, q_i | t_{i-1}\, q_{i-1}\rangle = \langle q_i | e^{-i\frac{H}{\hbar}\Delta t} | q_{i-1}\rangle$$

$$\simeq \langle q_i | \left[1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})\right)\right] | q_{i-1}\rangle$$

$$= \int dp_i \langle q_i|p_i\rangle \left[1 - \frac{i}{\hbar}\Delta t\left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\right] \langle p_i | q_{i-1}\rangle$$

$$\simeq \int \frac{dp_i}{2\pi\hbar}\, e^{i/\hbar\cdot\Delta t[p_i \Delta q_i - H(p,q)]} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\Delta t\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\Delta q_i}{\Delta t}\right)^2 - V(q_i)\right]}$$

$$☆ \longrightarrow \int_a^b \mathcal{D}q\; e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right)}$$

要点は…

$$\begin{cases} \langle t_b, q_b | t_a, q_a\rangle = \displaystyle\int_a^b \mathcal{D}q\; e^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \\ S[q] = \displaystyle\int_{t_a}^{t_b} dt\, L(q, \dot{q}) \end{cases}$$

一次元自由粒子

$(t_a, q_a) \longrightarrow (t_b, q_b)$ への経路 $q_c(t) = \dfrac{q_b - q_a}{t_b - t_a}(t - t_a) + q_a$

$$S[q_c] = \int_{t_a}^{t_b} dt \, \frac{1}{2} m \dot{q}_c(t)^2 = \frac{m}{2} \frac{(q_b - q_a)^2}{t_b - t_a}$$

よって $\langle t_b, q_b | t_a, q_a \rangle = \sqrt{\dfrac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(q_b - q_a)^2}{t_b - t_a}}$ Green 関数

$\hat{H} | \varphi_n \rangle = E_n | \varphi_n \rangle$ として、

$$\sum_n \frac{1}{E_n - E - i\varepsilon} = \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \sum_N \langle \varphi_N | e^{-i/\hbar (\hat{H} - E - i\varepsilon) t} | \varphi_n \rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \, e^{i(E + i\varepsilon) t/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle q | e^{-i\hat{H} t/\hbar} | q \rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \, e^{i(E + i\varepsilon) t/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_q^q \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} S[q]}$$

相互作用表示 $\hat{V}_I(t)$ について、

$\hat{U}(t_0, t) = 1 + \dfrac{1}{i\hbar} \displaystyle\int_t^{t_0} dt' \, \hat{U}(t_0, t') \hat{V}_I(t')$ となる。 逐次近似.

$\hat{H}_0 | \varphi_a \rangle = E_a | \varphi_a \rangle$ に対して、散乱状態 $| \psi_a^{\pm} \rangle$ を

$\displaystyle\lim_{t_0 \to \mp\infty} \hat{U}(0, t_0) | \varphi_a \rangle = | \psi_a^{\pm} \rangle$ と定義する。

$$| \psi_a^{\pm} \rangle = \hat{U}(0, \mp\infty) | \varphi_a \rangle = | \varphi_a \rangle + \underline{\frac{1}{i\hbar} \int_{\mp\infty}^{0} dt' \, \hat{U}(0, t') \hat{V}(t') | \varphi_a \rangle} \quad ☆$$

$$☆ = \frac{1}{i\hbar} \int_{\mp\infty}^{0} dt' \, e^{\frac{i\hat{H}_0 t'}{\hbar}} \hat{V} e^{-\frac{i\hat{H}_0 t'}{\hbar}} | \varphi_a \rangle \cdot e^{-\frac{\varepsilon |t'|}{\hbar}}$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \int_{\mp\infty}^{0} dt' \, e^{i(\hat{H} - E_a) t'/\hbar - \varepsilon |t'|/\hbar} \hat{V} | \varphi_a \rangle = \frac{1}{E_a - \hat{H} \pm i\varepsilon} \hat{V} | \varphi_a \rangle$$

これより $| \psi_a^{\pm} \rangle = | \varphi_a \rangle + \dfrac{1}{E_a - \hat{H}_0 \pm i\varepsilon} \hat{V} | \psi_a^{\pm} \rangle$ (Lippma − Schwinger eq.)

調和振動子

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m(\ddot{q} + \omega q) = 0$$ の古典解 $q_c(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

境界条件 $q_a = q_c(t_a)$, $q_b = q_c(t_b)$ として.

$$\begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t_a & \sin\omega t_a \\ \cos\omega t_b & \sin\omega t_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad ① \longrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\omega T}\begin{pmatrix} \sin(\omega t_b) & -\sin(\omega t_a) \\ -\cos(\omega t_b) & \cos(\omega t_a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix}$$

$(T = t_b - t_a)$.

一方, $\dot{q}_c^2 = \frac{d}{dt}(q_c\dot{q}_c) - q_c\ddot{q}_c$ より.

$$S[q_c] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left\{ \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(q_c\dot{q}_c) - \frac{1}{2}m q_c(\ddot{q}_c + \omega q_c) \right\} = \frac{m}{2}(q_b\dot{q}_b - q_a\dot{q}_a)$$

$$① \to \begin{pmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_b \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t_a & \cos\omega t_b \\ -\sin\omega t_a & \cos\omega t_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\sin\omega T}\begin{pmatrix} -\cos\omega T & 1 \\ -1 & \cos\omega T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix}$$ より.

$$S[q_c] = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left\{(q_b^2 + q_a^2)\cos\omega T - 2q_b q_a\right\}$$ となる.

よって, $\langle t_b, q_b | t_a, q_a \rangle = N(T)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left\{(q_b^2 + q_a^2)\cos\omega T - 2q_b q_a\right\}\right]$

次に, $N(T)$ を求める.

結合則 $\langle T'+T, 0 | 0, 0 \rangle = N(T'+T) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle T'+T, 0 | T, q \rangle \langle T, q | 0, 0 \rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq\, N(T') e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2}\cot(\omega T')q^2} \cdot N(T) e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2}\cot(\omega T)q^2}$$

$$= N(T')N(T)\sqrt{\frac{2\pi i\hbar}{m\omega}\frac{\sin\omega T' \sin\omega T}{\sin\omega(T'+T)}}$$

つまり, $N(T'+T)\sqrt{\frac{2\pi i\hbar \sin(\omega(T'+T))}{m\omega}} = N(T')\sqrt{\frac{2\pi i\hbar \sin\omega T'}{m\omega}} \cdot N(T)\sqrt{\frac{2\pi i\hbar \sin\omega T}{m\omega}}$

任意の $T' T$ で成立するには, $N(T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega T}}$ となる.

$$\langle T, q | 0, q \rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}}\; e^{i \frac{m\omega}{\hbar \sin \omega T} \left(\cos(\omega T) - 1\right) q^2}$$ より.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \langle T, q | 0, q \rangle = \frac{1}{2 i \sin \frac{\omega T}{2}} = \frac{e^{-i\frac{\omega T}{2}}}{1 - e^{-i\frac{\omega T}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)T}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\hat{H} - E - i\varepsilon}\right) = \frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} dT\, e^{i(E+i\varepsilon)T/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dq \langle T, q | 0, q \rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dT\, e^{-i\left\{\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{E}{\hbar} - i\frac{\varepsilon}{\hbar}\right\}T}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - E - i\varepsilon}$$

よって. 求める特異点は、 $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ となる.

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$ を示す.

まず. $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}$ において.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -\frac{x-x'}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x-x'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

y, zについても同様

よって. $\nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$ となる. ☆ ただし. $\mathbf{r}-\mathbf{r}' \neq 0$

次に. $\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi$ であるので. Gaussの定理を用いて.

$$\int_V \nabla_{\mathbf{r}}^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV = \oint_S \nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\cdot d\mathbf{S}$$

$$\overset{☆}{=} -\oint_S \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\cdot d\mathbf{S}$$

ここで $\mathbf{r}-\mathbf{r}'=0$ を中心とする半径aの球を考えると.

$$= -\oint \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dS = -\oint_S \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}dS = -\frac{1}{a^2}\underbrace{\oint_S dS}_{4\pi a^2} = -4\pi$$

☆☆

一方. ☆において. $\nabla_{\mathbf{r}}\cdot\left(\nabla_{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right)$ を考える

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - \frac{3(x-x')^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}$$, y, zも同様.

よって. $$\nabla_{\mathbf{r}}^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \frac{3\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} - \frac{3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$= \frac{3|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} - \frac{3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = 0$$ となる. ☆☆☆

ただし. $\mathbf{r}-\mathbf{r}' \neq 0$

Ⓐ～ⒷⒸⒹ を合わせると、

$$\nabla_{\mathbf{r}}^{2}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=0 \qquad (\mathbf{r}-\mathbf{r}'\neq 0 \text{ のとき})$$

また、$\mathbf{r}-\mathbf{r}'=0$ では、$\int_V \nabla_{\mathbf{r}}^{2}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dv = -4\pi$ の値をもつ。

これは、δ関数の性質そのもの。
（体積積分が値をもつ）

よって、$\nabla_{\mathbf{r}}^{2}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ となる。

一般に、関数 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ が

$$\nabla_{\mathbf{r}}^{2}G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$ をみたすとき、

$f(\mathbf{r}) = \int_{V'} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')dv'$ は、$\underbrace{\nabla_{\mathbf{r}}^{2}f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})}_{\text{微分方程式}}$ の解である。

$\because$) $\nabla_{\mathbf{r}}^{2}f(\mathbf{r}) = \int_{V'}\nabla_{\mathbf{r}}^{2}G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')dv' = \int_{V'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')g(\mathbf{r}')dv' = g(\mathbf{r})$ であるため。

(例) $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, $\quad g(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ とすると、

Poisson方程式

$$\nabla^{2}\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ の解は、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$ と書ける。

例. $\mathbb{A}$ と $\mathbb{g}$ は $\mathbb{r}$ の関数とする.

$\mathbb{A}$ が $\nabla^2\mathbb{A} = -\mathbb{g}$ をみたすときの $\mathbb{A}$ を求める.

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -g_x \\ \nabla^2 A_y = -g_y \\ \nabla^2 A_z = -g_z \end{cases}$$

$G(\mathbb{r}-\mathbb{r}') = -\dfrac{1}{4\pi|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}$ として.

$$A_x = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{g_x(\mathbb{r}')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}\,dv' \quad , \quad A_y = \cdots , \quad A_z = \cdots .$$

よって. $\mathbb{A}(\mathbb{r}) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{V'} \dfrac{\mathbb{g}(\mathbb{r}')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}\,dv'$

これは. Coulomb ゲージ ($\nabla\cdot\mathbb{A}=0$) のもとでのベクトルポテンシャルである.