スピン角運動量

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

交換関係 $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$ $[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x$ $[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$ となる.

Lと同じ代数構造になるには.

$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ とする必要がある. $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \hat{S}_k$

σ_iに関する性質

- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$
- $\sigma_i\sigma_j = i\sigma_k$ 　　$\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = I\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$

エディントンのイプシロン
$\begin{cases} 偶ちかん & 1 \\ 奇 & -1 \\ 上以外 & 0 \end{cases}$

- $(\sigma\cdot A)(\sigma\cdot B) = A\cdot B + i\sigma(A\times B)$
- $e^{-\frac{i\theta}{2}\hat{\sigma}_i} = I\cos\frac{\theta}{2} - i\hat{\sigma}_i\sin\frac{\theta}{2}$
- $S = \frac{\hbar}{2}$ は L と同じ規則

$$\hat{S}^2|s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, m\rangle$$
$$\hat{S}_z|s, m\rangle = \hbar m|s, m\rangle$$
$$\hat{S}_+|\alpha\rangle = 0 \quad \hat{S}_+|\beta\rangle = \hbar|\alpha\rangle$$

$\begin{cases} |\alpha\rangle = |s=\frac{1}{2}, m=\frac{1}{2}\rangle & |\uparrow\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |\beta\rangle = |s=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}\rangle & |\downarrow\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

3次元ベクトル $\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ と $\hat{\sigma}$ の内積 $(0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$

$$A = \sum v_i\sigma_i = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

固有値 $\varepsilon = \pm 1$. 固有ベクトル

$\varepsilon = 1$に対して $k_1\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$, $\varepsilon = -1$に対して $k_2\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

k_1, k_2は比例定数

Aの対角化のための変換行列

$$U_{\theta,\phi} = \begin{pmatrix} k_1\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} & -k_2\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ k_1\sin\frac{\theta}{2} & k_2\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$\det U = 1$ となるようにすると. $k_1k_2e^{-i\phi} = 1$

$k_1 = k_2 = e^{i\phi/2}$ とおける.

$$U_{\theta,\phi} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\phi}{2}} & -\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\phi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i\phi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix}$$ となる (ユニタリ行列)

SU(2) 群

↑ スペシャルと(det=1のこと)

余談. 位相因子 $e^{i\phi}$ などは U(1) 群に属する

$U = e^{i\phi} \rightarrow U^\dagger = e^{-i\phi}$

このとき $UU^\dagger = 1$ なので1次元のユニタリー行列とみなせる.

$U_{\theta,\phi}$ について.

・$\theta=0$ のとき. $U_{0,\phi}=\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix}$

$\phi=2\pi$ のとき $U_{0,2\pi}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 　 $\phi=4\pi$ のとき $U_{0,4\pi}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

・$\phi=0$ のとき $U_{\theta,0}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

$\theta=2\pi$ のとき $U_{2\pi,0}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 　 $\theta=4\pi$ のとき $U_{4\pi,0}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ユニタリ行列 U による3次元座標回転

3次元 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする $\longrightarrow$ $A\equiv\begin{pmatrix} x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$

（オイラー回転の本質について各自調べよ.）

$SU(2)$ 行列 U として. $A'=UAU^\dagger$

回転行列 T として. 　 $x'=T_{(1)}x$

$O(3)$ 群 (orthogonal) 　 $x''=T_{(2)}x'=T_{(3)}x=T_{(2)}T_{(1)}x$ と書ける.

$$A''=U_{(2)}A'U_{(2)}^\dagger$$
$$=U_{(2)}U_{(1)}AU_{(1)}^\dagger U_{(2)}^\dagger$$
$$=U_{(3)}AU_{(3)}^\dagger$$

$\longrightarrow T_{(3)}=T_{(2)}T_{(1)}$ (3×3)

"準同型"

$\longrightarrow U_{(3)}=U_{(2)}U_{(1)}$ (2×2)

このように, 3次元の回転 $O(3)$ と 2次元ユニタリー変換 $SU(2)$ は似ている

$$O(3) \xleftrightarrow[1\text{対}2]{} SU(2)$$

$SU(2)$ は 4π 対称性があるため.

例. $x_\pm = x_1 \pm i x_2$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = T_3(-\theta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_\pm' = x_1' \pm i x_2' = (\cos\theta \pm i\sin\theta)\, x_1 \pm i(\cos\theta \pm i\sin\theta) x_2$$
$$= e^{\pm i\theta} \cdot x_\pm$$
$$x_3' = x_3$$

このとき $U_3(\theta) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$ となる.

$$U_3(-\theta)\, X\, U_3(-\theta)^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 & x_- \\ x_+ & -x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} x_3 & e^{-i\theta} x_- \\ e^{i\theta} x_+ & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3' & x_-' \\ x_+' & -x_3' \end{pmatrix} = X'$$

2次元

$$U_j(\theta) = e^{\frac{i\theta\sigma_j}{2}} \quad (j = x, y, z)$$

$$U_1(\theta) = e^{\frac{i\theta\sigma_x}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$U_2 = e^{\frac{i\theta\sigma_y}{2}} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_j(\theta) = I\cos\frac{\theta}{2} + \sigma_i \cdot i\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{となっている}$$

電磁場の量子化

Maxwell eqs.

$$
\begin{cases}
\mathrm{rot}\,\mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\
\dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathbb{B} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} + j \\
\varepsilon_0\, \mathrm{div}\,\mathbb{E} = \rho \\
\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0
\end{cases}
$$

公式 $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = 0$ と比較して $\mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A}$

$$\mathrm{rot}\left(\mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right) = 0$$

また、公式 $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0$ と比較して. $\mathbb{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$

$\mathbb{E}, \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}, \phi$ へ

一方. $\dfrac{1}{\mu_0}\underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{A}}_{=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{A} - \nabla^2 \mathbb{A}\ (\text{公式})} = -\varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{grad}\,\phi + \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right) + j$

$$\longrightarrow \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{A} - \nabla^2 \mathbb{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\phi + \frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2}\right) = \mu_0 j$$

$c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ より

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbb{A} - \nabla^2 \mathbb{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\phi = \mu_0 j \\
&\text{他方.}\quad -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\mathbb{A} = \rho
\end{aligned}
\right\}
$$

j と ρ の間には、連続の式 $\mathrm{div}\,j + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ が成立する

$$\mathrm{div}\,j = \mathrm{div}\left(\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathbb{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\, \mathrm{div}\,\mathbb{E}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ゲージ不変性

$\mathbb{j}$ と ρ を与えても、$\mathbb{A}, \phi$ は一意に定まらない。

χ：任意関数を用いて

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 + \mathrm{grad}\,\chi \quad , \quad \phi = \phi_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$ "ゲージ変換"

「$\mathbb{E}, \mathbb{B}$ はゲージ変換に対して不変である」

$$\chi(\mathbb{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathrm{div}\,\mathbb{A}_0(\mathbb{r}')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}\,d\mathbb{r}'$$ と選ぶ

公式 $\nabla^2 \dfrac{1}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbb{r}-\mathbb{r}')$ を用いて。
(グリーン関数)

$$\nabla^2\chi(\mathbb{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\left(\nabla^2\frac{1}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}\right)\mathrm{div}\,\mathbb{A}_0(\mathbb{r}')\,d\mathbb{r}' = -\mathrm{div}\,\mathbb{A}_0(\mathbb{r})$$

このとき、$\mathrm{div}\,\mathbb{A} = \mathrm{div}\,\mathbb{A}_0 + \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\chi = \mathrm{div}\,\mathbb{A}_0 + \nabla^2\chi = 0$

$\mathbb{A}$ が $\mathrm{div}\,\mathbb{A} = 0$ をみたすゲージを「クーロンゲージ」という。

$\mathrm{div}\,\mathbb{A} = 0 \longrightarrow \mathbb{A}$ が横波

$$\mathbb{A}(\mathbb{r},t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\mathbb{A}_k(t)\,e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}$$ (Fourier 変換)

$$\mathrm{div}\,\mathbb{A}(\mathbb{r},t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\underbrace{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{A}_k(t)}\,e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}} = 0$$

$\longrightarrow \mathbb{k} \perp \mathbb{A}_k$　　　$\mathbb{k}$：進行方向

($\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0$ より $\mathbb{B}$ も横波)

クーロンゲージ条件を基礎方程式に代入して。

$$\begin{cases} -\nabla^2\mathbb{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbb{A}}{\partial t^2} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\phi = \mu_0\,\mathbb{j}(\mathbb{r},t) \\ -\varepsilon_0\nabla^2\phi = \rho \end{cases}$$ ← Poisson eq.

$$\to \phi(\mathbb{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbb{r}',t)}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}\,d\mathbb{r}'$$ となる

$$\underbrace{-\nabla^2 \mathbb{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2}}_{\text{横波}} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\phi}_{\text{縦波}} = \mu_0 j(\mathbb{r}, t) \quad (\star)$$

縦波 $\rightarrow$ j_L (longitudinal)

横波 $\rightarrow$ j_T (transverse)

$$\phi(\mathbb{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \phi_k\, e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}$$

$$\mathrm{div}\,\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, i\mathbb{k}\, \phi_k\, e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}} \longrightarrow \mathbb{k}\text{ に比例する} \longrightarrow \text{縦波}$$

$$j(\mathbb{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, j_k\, e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\frac{(j_k\cdot\mathbb{k})}{k^2}\mathbb{k} + \left(j_k - \frac{(j_k\cdot\mathbb{k})}{k^2}\mathbb{k}\right)\right]e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}$$

$$= j_L + j_T$$

$$(\star) \rightarrow \left\{\begin{aligned} j_L(\mathbb{r}, t) &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\phi(\mathbb{r}, t) \\ -\nabla^2 \mathbb{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{A}}{\partial t^2} &= \mu_0\, j_T(\mathbb{r}, t) \end{aligned}\right.$$

要証明

$$\Rightarrow^{(\text{解})}\ \mathbb{A}(\mathbb{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j_T(\mathbb{r}', t')}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}\, d\mathbb{r}' \qquad t' = t - \frac{|\mathbb{r}-\mathbb{r}'|}{c}$$

電場も $\mathbb{E} = \mathbb{E}_L + \mathbb{E}_T$ と分解

$$\mathbb{E}_L = -\mathrm{grad}\,\phi, \qquad \mathbb{E}_T = -\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$$

$$j_L = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\phi = -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbb{E}_L}{\partial t} \quad (\text{変位電流})$$

$$\mathrm{div}\, j_L = \mathrm{div}\, j$$

given $\rho \longrightarrow \phi$, $\quad j_T \longrightarrow \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{E}_T$

$\phi \downarrow \mathbb{E}_L \qquad \mathbb{B}$

アハラノフ-ボーム効果 (J.J. Sakurai 2.6章)

電磁場中 $H^{\text{int}} = \frac{1}{2m}(p-eA)^2 + V(r) + q\phi(r,t)$

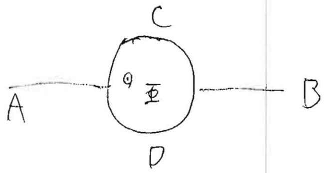
$\longrightarrow\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - eA\right)^2 + V(r) + q\phi\right]\psi(r,t)$

$A = A_0 + \mathrm{grad}\,\chi,\quad \phi = \phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}$

ここで、$\psi(r,t) = \psi_0(r,t)\,e^{\left(\frac{i}{\hbar}q\chi(r,t)\right)}$ とすれば、ゲージ変換に対して不変。

時間に依存しないとき、$\psi(r) = \psi_0(r)\exp\left(\frac{i}{\hbar}q\int^{r}A(x)dx\right)$ を代入して、

$E\psi_0(r) = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla\right)^2 + V(r) + q\phi(r)\right]\psi_0(r)$ となり、Aを含まない。
(ψに入っている)



経路 ACB $\psi_1 = \psi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}q\int_{ACB}A(x)dx\right)$

ADB $\psi_2 = \psi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}q\int_{ADB}A(x)dx\right)$

$|\psi_1| = |\psi_2|$ (対称)

$$|\psi_1+\psi_2|^2 = |\psi_0|^2\left|1+\exp\left(\frac{i}{\hbar}q\oint_{\text{リング}}A(x)dx\right)\right|^2$$

$$= 2|\psi_0|^2\left(1+\cos\left(\frac{q}{\hbar}\Phi\right)\right)$$

ここで、$\Phi \equiv \oint_{\text{リング}} A dx \underset{\uparrow\ \text{ストークス}}{=} \int_{\text{リング}} \mathrm{rot}A\cdot dS = \int_{\text{リング}} B\cdot dS$

B:ゲージ不変 $\longrightarrow$ Φも不変。(AB効果)

Φを変化させる実験 $\longrightarrow$ AB間のコンダクタンス振動 $\left(\cos\frac{q}{\hbar}\Phi\right)$

古典論 $F = q(E + v\times B)$

E, B なくても ψはAを用いて表される。

今、1周Lのリング(中にΦ)として、AB効果により1周により位相φだけ変化。

$\psi(x+L) = \psi(x)e^{i\phi}$ $\longrightarrow$ 一価性より $\phi = 2\pi\cdot n$

$\phi = \frac{q}{\hbar}\oint A dx = \frac{q}{\hbar}\Phi = 2\pi n$

$\Phi = \frac{h}{q}\cdot n$

AB効果の基本周期 $\left(\frac{h}{q}\right)$ より、電荷 q を求められる。

自由場の正準形式

自由場：電荷のない電磁場.

クーロンゲージ $\phi = 0$ 　$j_c = 0$
$\mathrm{div}\,\mathbb{A}=0$ 選ぶ

このとき,
$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{A}(\mathbb{r}, t) = 0 \qquad ①$$

相対論： $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$

$$\xrightarrow[\text{量子化}]{} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_\mu = \left(\frac{mc}{h}\right)^2 A_\mu$$

と比較すると $m=0$
"光子の質量ゼロ"

① の解 $\mathbb{A}(\mathbb{r}, t) = \sum_{k}\sum_{\lambda=1,2}\left[\mathbb{A}_{k\lambda}e^{+i(kr-\omega t)} + \mathbb{A}^*_{k\lambda}e^{-i(kr-\omega t)}\right]$

$\omega_k = c|k|$, 　$A^*_{k\lambda} = A_{-k\lambda}$ 　　λ：偏光の自由度.

よって. $\mathbb{E}(\mathbb{r}, t) = -\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} = \sum_{k\lambda} i\omega_k\left[\mathbb{A}_{k\lambda}e^{i(kr-\omega t)} - \mathbb{A}^*_{k\lambda}e^{-i(kr-\omega t)}\right]$

$\mathbb{B}(\mathbb{r}, t) = \mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \sum_{k\lambda} i\mathbb{k}\times\left[\mathbb{A}_{k\lambda}e^{i(kr-\omega t)} - A^*_{k\lambda}e^{-i(kr-\omega t)}\right]$

電磁場の全エネルギー

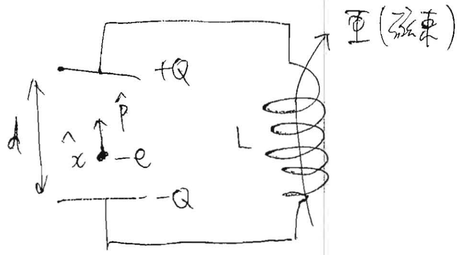
$$E = \frac{1}{4}\int\left(\varepsilon_0\mathbb{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbb{H}^2\right)d\mathbb{r} = \sum_{k\lambda} 2\varepsilon_0 V\omega_k^2\,\mathbb{A}^*_{k\lambda}\mathbb{A}_{k\lambda}$$

ここで複素量 $\mathbb{A}_{k\lambda} = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon_0 V\omega_k^2}}\left(\omega_k Q_{k\lambda} + iP_{k\lambda}\right)\varepsilon_{k\lambda}$

— 偏光ベクトルの単位ベクトル
k方向と垂直な偏光方向 (λの)

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\sum_{k\lambda}\left(P_{k\lambda}^2 + \omega_k^2 Q_{k\lambda}^2\right)$$

電荷と磁束の不確定性



コンデンサー内 $E = \frac{V}{d}$ で電荷が加速される.

$$\frac{d\hat p}{dt} = e\frac{V}{d} = -\frac{e}{d}\frac{d\Phi}{dt} \quad \leftarrow \quad V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

運動eq　　Faraday

積分して. $\hat\Phi = -\frac{d}{e}\hat p + \text{Const.}$

一方. 電子が $d\hat x$ 動くと. $\left(-\frac{e}{d}\right)d\hat x$ の鏡像電荷が誘起される

$$dQ = -\frac{e}{d}d\hat x \longrightarrow Q = -\frac{e}{d}\hat x + \text{Const.}$$

$\hat x, \hat p$ の関係から. $[\hat Q, \hat\Phi] = [\hat x, \hat p]_{=i\hbar}$ となる.

LC回路のハミルトニアン $\hat H = \frac{\hat\Phi^2}{2L} + \frac{\hat Q^2}{2C}$: 調和振動子とみなせる.

$$\xrightarrow{\text{量子化}} E_n = \hbar\omega_{LC}\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad \omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

不確定性 $\Delta\Phi\cdot\Delta Q \geq \frac{\hbar}{2}$

LC回路の電荷Qの量子ゆらぎを見積もる.

零点エネルギー $\frac{1}{2}\hbar\omega_{LC}$

基底状態では $E_{\text{コンデンサ}} = E_{\text{コイル}}$ なので

$$\left\langle\frac{\hat Q^2}{2C}\right\rangle = \frac{\hbar\omega_{LC}}{4}$$

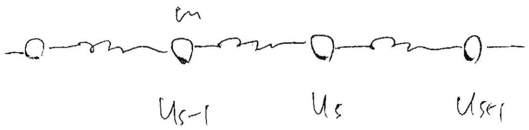
よって. $\Delta Q \equiv \sqrt{\langle\hat Q^2\rangle} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{LC}C}{2}} = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{LC}}{\frac{e^2}{2C}}}$

量子化エネルギー $\hbar\omega_{LC}$ と電子1コの静電エネルギー $\frac{e^2}{2C}$ の比が量子ゆらぎを決める

メゾスコピック領域の超微小デバイスの動作性能の原理的限界を示す.

(+1)

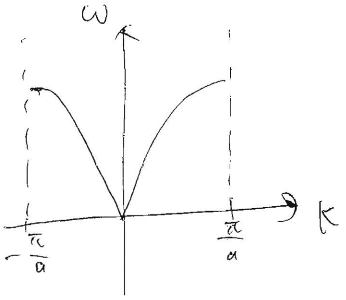
格子振動の量子化 (フォノン)



運動方程式 $m\dfrac{d^2u_s}{dt^2} = -k(u_{s+1}-u_s) - k(u_{s-1}-u_s)$

基準振動 $u_{s\pm1} = u\, e^{-iska}\, e^{\pm ika}$ として代入.

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}(1-\cos ka)$$ となる.



量子論では, 調和振動子の和とみなせる.

$$E = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$$
$$= \sum_q \left(a_q^\dagger a_q + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\,\omega(q)$$

量子 : フォノン