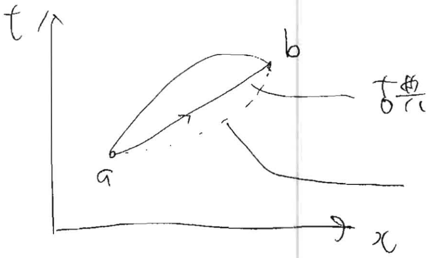
経路積分 (J.J. Sakurai 2.5章)



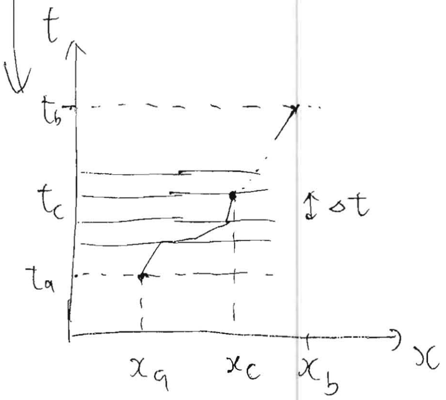
古典 $x(t)$ 位相 $\frac{S}{\hbar}$

$x(t)+\delta x(t)$ $\frac{S+\delta S}{\hbar}$

$$\varphi(x(t)) \propto e^{i\frac{S[x(t)]}{\hbar}}$$

$$e^{i\frac{S}{\hbar}} = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} = e^{i(kx-\omega t)}$$

確率振幅 $K(b,a)$ (2乗が確率)



$$K(b,a) \propto \sum_a^b \int\cdots\int \varphi(x(t))\,dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1}$$

$$= \int_a^b \mathcal{D}x\, e^{i\frac{S[x(t)]}{\hbar}} \quad \text{(path integral)}$$

$x = x_c$ を通るとして

$$K(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_c\, K(b,c)\, K(c,a)$$

$\Delta t = \frac{t_N - t_0}{N}$ と分割して

$$K(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} K(n+1,n)$$ となる.

$$K(n+1,n) = \frac{1}{A} e^{\frac{i}{\hbar}S(n+1,n)}$$

$$\sim \frac{1}{A} e^{i\frac{\Delta t}{\hbar}L(v_c, x_c, t_c)}$$

$c \to$ 中点 $n+\frac{1}{2}$, $n+1$, n

$$\sim \frac{1}{A} e^{i\frac{\Delta t}{\hbar}L\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t},\ \overbrace{\frac{x_{n+1}+x_n}{2}}^{x_c},\ t_c\right)}$$

$N\to\infty$ として

$$K(b,a) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{A^N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1}\, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1} S(n+1,n)}$$

これより

$$\psi(x',t') = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \underbrace{K(x',t';x,t)}_{\text{propagator 伝播関数}}\, \psi(x,t)$$ と書ける

経路積分によりSchrödinger eqを導く。

$$\psi(x', t+\Delta t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{A} e^{i\frac{\Delta t}{\hbar} L\left(\frac{x'-x}{\Delta t}, \frac{x'+x}{2}, t+\frac{\Delta t}{2}\right)} \cdot \psi(x, t)$$

一次元 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x, t)$ として、

$$\Delta t \cdot L\left(\frac{x'-x}{\Delta t}, \frac{x'+x}{2}, t+\frac{\Delta t}{2}\right) = \underbrace{\frac{m(x'-x)^2}{2\Delta t}}_{\Delta t \to 0 \text{ で激しく振動する。}} - U\left(\frac{x'+x}{2}, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t$$

を代入する。

$$\frac{m(x'-x)^2}{\Delta t} < \hbar \Rightarrow |x'-x| < \sqrt{\frac{\hbar \Delta t}{m}}$$ が実質的に効く。

$\overset{クザイ}{\xi} \equiv x' - x$ とおく。

$$\psi(x, t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{A} \exp\left[i\frac{m\xi^2}{2\hbar\Delta t} - i\frac{\Delta t}{\hbar} U\left(x+\frac{\xi}{2}, t+\frac{\Delta t}{2}\right)\right] \psi(x-\xi, t)$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{A} e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t}} \left[1 - i\frac{\Delta t}{\hbar} U(x,t)\right] \cdot \left(\psi(x,t) - \xi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\xi^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)$$

$\Delta t \to 0, \xi \to 0$ で両辺とも $\psi(x,t)$ に一致するので

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t}} = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{A} \xi e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t}} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{A} \xi^2 e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\Delta t}} = \frac{i\hbar\Delta t}{m}$$

よって、$$\psi + \Delta t \frac{\partial\psi}{\partial t} = \psi - \frac{i\Delta t}{\hbar} U(x,t)\psi + \frac{1}{2}\frac{i\hbar\Delta t}{m} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x,t)\right]\psi = \hat{H}\psi$$

<u>コメント</u> L (もしくは S) が与えられれば求められる。

演算子の交換関係

$$\begin{cases} \hat{p} = -i\hbar\nabla \\ \hat{E} = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \hat{x} = x \end{cases}$$

$\int \psi^* \psi \, d\tau = \langle \psi | \psi \rangle$ と書く

$\int \psi^* \hat{A} \psi \, d\tau = \langle \psi | A | \psi \rangle$

エルミート性 $(A_{ij})^\dagger = (A_{ji})^*$

$\dfrac{\partial}{\partial x}(x\psi) = \psi + x\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ より

$-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}(x\psi) = -i\hbar\psi + x\left(-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$

演算子を用いて $\hat{p}(\hat{x}\psi) = -i\hbar\psi + \hat{x}\hat{p}\psi$

よって $\hat{p}\hat{x} = -i\hbar + \hat{x}\hat{p}$

$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$ となる.

$\hat{E}|\psi\rangle = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle$

$\dfrac{\partial}{\partial t}(t|\psi\rangle) = |\psi\rangle + t\dfrac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle$

よって $\left\{\left(i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\right)t - t\left(i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\right\}|\psi\rangle = i\hbar|\psi\rangle$

よって $[\hat{E}, \hat{t}] = \hat{E}\hat{t} - \hat{t}\hat{E} = i\hbar$.

$\Delta\hat{x} \equiv \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle \qquad \Delta\hat{p} \equiv \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle$ より

$\hat{A} \equiv t\Delta\hat{x} - i\Delta\hat{p}$ を定義する.

$\int \psi^* \hat{A}^\dagger \hat{A} \psi \, d\tau = \int (\hat{A}\psi)^* (\hat{A}\psi) \, d\tau = \int |\hat{A}\psi|^2 d\tau \geq 0$

$$\langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle = \langle (t\Delta\hat{x} + i\Delta\hat{p})(t\Delta\hat{x} - i\Delta\hat{p}) \rangle$$

$$= t^2\langle (\Delta\hat{x})^2 \rangle + it\langle \Delta\hat{p}\Delta\hat{x} - \Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \rangle + \langle (\Delta\hat{p})^2 \rangle$$

$\langle \hat{x} \rangle$は数なので交換する.

$$= t^2\langle (\Delta\hat{x})^2 \rangle + it\langle \hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} \rangle + \langle (\Delta\hat{p})^2 \rangle$$

$$= t^2(\Delta x)^2 + \hbar t + (\Delta p)^2 \geq 0$$

$D = \hbar^2 - 4(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \leq 0 \longrightarrow$ 不確定性を表す.

ユニタリー性 $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}, \ \hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$
(ユニットになる)

$\Delta x = c\Delta t$, $\Delta p = \dfrac{\Delta E}{c}$ として. $\Delta t \Delta E \geq \dfrac{1}{2}\hbar$ となる.

Schrödinger eq. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \hat{H}\psi(x,t)$

形式解 $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\psi(x,0) = \hat{U}(t)\psi(x,0)$ となる

エルミート $\hat{H}^{+} = \hat{H}$

$\hat{U}^{+}\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^{+} = I$ ユニタリ

Aの期待値 (observable) $\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$

$$= \langle\psi(0)|\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}_{\hat{A}(t)}|\psi(0)\rangle$$

ハイゼンベルグ表示
(演算子が t dep.)

一方, Schrödinger 表示

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$ 状態が t dep.

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}(\hat{H}\hat{A}-\hat{A}\hat{H})e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

$$= \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{A}(t)-\hat{A}(t)\hat{H})$$

$$= \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}(t)]$$ ハイゼンベルクの運動方程式

例. 自由粒子 $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ について.

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i, H] = -\frac{\partial}{\partial x_i}V(x)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m}$$

もう一度ハイゼンベルク方程式を用いて $\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{dx_i}{dt}, H\right] = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{p_i}{m}, H\right] = \frac{1}{m}\frac{dp_i}{dt}$

よって $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla V(x)$ となり, Newton 第2法則.

ハイゼンベルク表示では, ケットが時間変化しないので.

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\langle\nabla V(x)\rangle$$ となる エーレンフェストの定理

コメント
- ハイゼンベルク表示のときのみできる
- $\hbar$ が入らない (当然!?) → 古典的

相互作用表示

$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ と分離できるとき.（$\hat{H}_0$ については解けるとき）. 相互作用表示が有用である.

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}|\psi_s(t)\rangle$$ とする.

interaction　　Schrödinger 表示

← 相互作用表示は. Schrödinger 表示と Heisenberg 表示の中間である.（演算子. 状態関数共にも依存性が入る.）

$$\rightarrow |\psi_s(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}|\psi_I(t)\rangle$$

これを. Schrödinger eq $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_s(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V})|\psi_s(t)\rangle$ へ代入

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle = \hat{V}_I(t)|\psi_I(t)\rangle \quad ⊛$$

$$\hookrightarrow \hat{V}_I(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{V}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$$

運動方程式 $\frac{d}{dt}\hat{V}_I(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_0, \hat{V}_I(t)]$

$t=0$ では. どの表示も一致する $|\psi_I(0)\rangle = |\psi_H\rangle = |\psi_s(0)\rangle$

⊛ を逐次的に解く.

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(0)\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\, \hat{V}_I(t_1)|\psi_I(t_1)\rangle$$

$$= |\psi_I(0)\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\, \hat{V}_I(t_1)|\psi_I(0)\rangle + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\, \hat{V}_I(t_1)\hat{V}_I(t_2)|\psi_I(t_2)\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, \hat{V}_I(t_1)\hat{V}_I(t_2)\cdots\hat{V}_I(t_n)|\psi_I(0)\rangle$$

異なった時刻の $\hat{V}_I(t)$ は交換しない

ここで時間順序演算子 T により $T\{\hat{A}(t)\hat{B}(t')\} \equiv \begin{cases} \hat{A}(t)\hat{B}(t') & t \geq t' \\ \hat{B}(t')\hat{A}(t) & t < t' \end{cases}$ とする.

このとき

$$|\psi_I(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int_0^t dt_1\int_0^{t} dt_2\cdots\int_0^t dt_n \cdot T\{\hat{V}_I(t_1)\hat{V}_I(t_2)\cdots V_I(t_n)\}|\psi_I(0)\rangle$$

$$= T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, \hat{V}_I(t')\right)|\psi(0)\rangle$$

コメント 相互作用表示は. 統計力学におけるグリーン関数の定式化に用いられ. 極めて重要である.

調和振動子と交換関係 (J.J. Sakurai 2.3章)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を導入する

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}) \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p})$$

このとき $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ となる

逆に、$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ $\qquad \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$

これらを $\hat{H}$ に代入すると、

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$ となる

$\hat{a}$ 消滅 (annihilation)
$\hat{a}^\dagger$ 生成 (creation)

固有状態 $|n\rangle$ とする $\qquad \hat{H}|n\rangle = E|n\rangle$

左から $\hat{a}^\dagger$ かけると、

$$\hat{a}^\dagger\hat{H}|n\rangle = \cancel{a}\hbar\omega\hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$$

$$= \hbar\omega\left(a^\dagger a a^\dagger - a^\dagger + \frac{1}{2}a^\dagger\right)|n\rangle$$

$$= \hat{H}a^\dagger|n\rangle - \hbar\omega a^\dagger|n\rangle = E_n a^\dagger|n\rangle$$

よって、$\hat{H}a^\dagger|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)a^\dagger|n\rangle$

$a^\dagger$ は $\hbar\omega$ の量子を1つ生成する

同様に、$\hat{H}a|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)a|n\rangle$

系の最低エネルギー $|0\rangle$ (真空) $\qquad \hat{a}|0\rangle = 0$

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle$$

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (零点エネルギー)

※) $[a, a^\dagger] = 1$ が起源となっている.

$|0\rangle$ に $a^\dagger$ を n 回作用させる $\longrightarrow |n\rangle$

$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

よって. $\hat{n} \equiv a^\dagger a$ と表せる $\hat{n}|n\rangle = a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$.

$\hat{a}$ は消滅演算子なので $\hat{a}|n\rangle \propto |n-1\rangle$

$\hat{a}|n\rangle = c|n-1\rangle$, $\rightarrow \langle n|\hat{a}^\dagger = c^*\langle n-1|$

$\langle n|a^\dagger a|n\rangle = |c|^2\langle n-1|n-1\rangle = |c|^2 \longrightarrow c = \sqrt{n}\,e^{i\varphi} = \sqrt{n}$

↳ $\varphi=0$ とおいた. (任意)

同様に. $a^\dagger|n\rangle = \alpha|n+1\rangle$

$\langle n|\underbrace{a a^\dagger}_{a^\dagger a - 1}|n\rangle = |\alpha|^2\langle n+1|n+1\rangle = |\alpha|^2 \longrightarrow \alpha = \sqrt{n+1}$

よって. $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ となる.

次に. $\phi_n(x) \equiv \langle x|n\rangle$ について考える.

$\langle x|\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|$ と表せる.

$\phi_{n=0}(x) = \langle x|0\rangle$ は $\hat{a}|0\rangle = 0$, $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p})$ より.

$\langle x|\hat{a}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega x + \hbar\frac{d}{dx}\right)\langle x|0\rangle = 0$ となる

これより. $\phi_0(x) \equiv \langle x|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ ← 係数 $\int_{-\infty}^{\infty}\phi_0^2(x)dx = 1$ より 決める.

$\phi_n(x) = \langle x|n\rangle = \langle x|\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{n!}(2m\hbar\omega)^{\frac{n}{2}}}\underbrace{\left(m\omega x - \hbar\frac{d}{dx}\right)}_{= -\hbar e^{\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\frac{d}{dx}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}}{}^n\phi_0(x)$

また $\xi \equiv x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ とおくと...

$$\phi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^{\xi}}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \underbrace{H_n(\xi)}_{(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}}$$

エルミート多項式.

一方, ハイゼンベルク表示では.

$$\begin{cases} \hat{a}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\, \hat{a}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \\ \hat{a}^{+}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\, \hat{a}^{+}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \end{cases}$$

$\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}]$ より $\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = -i\omega\hat{a}(t)$

$\frac{d}{dt}\hat{a}^{+}(t) = i\omega\hat{a}^{+}(t)$

よって $\hat{a}(t) = \hat{a}e^{-i\omega t}$

$\hat{a}^{+}(t) = \hat{a}^{+}e^{i\omega t}$

よって. $\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^{+}e^{i\omega t} + \hat{a}e^{-i\omega t}\right)$

$\hat{p}(t) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^{+}e^{i\omega t} - \hat{a}e^{-i\omega t}\right)$ と書ける.

調和振動子の解法の別法

公式. $e^{i\hat{G}\lambda}\hat{A}e^{-i\hat{G}\lambda} = \hat{A} + i\lambda[\hat{G},\hat{A}] + \left(\frac{i^2\lambda^2}{2!}\right)[\hat{G},[\hat{G},\hat{A}]] + \cdots$

$$\cdots + \left(\frac{i^n\lambda^n}{n!}\right)\left[\hat{G},[\hat{G},\cdots[\hat{G},\hat{A}]\cdots]\right] + \cdots$$

ベーカー・ハウスドルフの補助定理

(ワイルの恒等式 $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ と関連)

ブロッソ 固体物理学(4) p.460

$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$ に適用すると.

$$x(t) = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\cdot\hat{x}\cdot e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} = \hat{x} + \frac{it}{\hbar}[\hat{H},\hat{x}] + \frac{i^2t^2}{2!\hbar^2}[\hat{H},[\hat{H},\hat{x}]] + \cdots \quad \text{Ⓐ}$$

ここで $[\hat{H},\hat{x}] = -\frac{i\hbar}{m}\hat{p}$

$[\hat{H},\hat{p}] = i\hbar\cdot m\omega^2\hat{x}$ を用いて

$$\text{Ⓐ} = \hat{x} + \frac{\hat{p}}{m}t - \frac{1}{2!}t^2\omega^2\hat{x} - \frac{1}{3!}t^3\omega^2\frac{\hat{p}}{m} + \cdots = x(t)$$

$$\rightarrow x(t) = \hat{x}\cdot\cos\omega t + \frac{\hat{p}}{m\omega}\cdot\sin\omega t$$

調和振動子 (古典論)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

正準変換 $Q = \dfrac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}}$, $P = i\dfrac{m\omega q - ip}{\sqrt{2m\omega}} = iQ^*$

を生み出す W_1 を求める.

$$p = i\left(m\omega q - \sqrt{2m\omega}\, Q\right) = \frac{\partial W_1(q.Q)}{\partial q}$$

$$P = i\left(\sqrt{2m\omega}\cdot q - Q\right) = -\frac{\partial W_1(q.Q)}{\partial Q}$$ となる.

積分して. $W_1(q.Q) = i\left(\dfrac{Q^2}{2} - \sqrt{2m\omega}\cdot qQ + \dfrac{m\omega}{2} q^2\right)$

このとき ハミルトニアン $K = H = -i\omega QP$ となる.

正準方程式は. $\dot{Q} = -i\omega Q$ → $e^{-i\omega t}$ の型

<u>ポアンカレ変換</u>

母関数が与えられているとき.

$W_1 = \dfrac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$ を選ぶ.

$$p = \frac{\partial W_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \qquad P = -\frac{\partial W_1}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q}$$

qについて解くと. $q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}} \sin Q$

ハミルトニアン $K = H = \omega P$ (Qがハミルトニアンに含まれない)

↓

Pは保存する.

$H = E$

正準方程式 $\dot{Q} = \dfrac{\partial H}{\partial P} = \omega$

→ $Q = \omega t + \alpha$ となる.

$\therefore\ q = \sqrt{\dfrac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$ α: 定数.