1　電気双極子モーメント

$(0,0,d)$ に $+q$、$(0,0,-d)$ に $-q$ の電荷があるとき、原点から遠く離れた点 $P(x,y,z)$ での電場は？

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_1}|^3}$$

$$E_x(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{x}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{y}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$E_z(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{z-d}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z+d}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

ここで、$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ として、$r \gg d$ となる。

$$\left(x^2+y^2+(z\mp d)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \left(x^2+y^2+z^2\mp 2zd\right)^{-\frac{3}{2}} = r^{-3}\left(1\mp\frac{2zd}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \simeq r^{-3}\left(1\pm\frac{3zd}{r^2}\right)$$

よって、点 P での電場は、

$$E_x = \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{3xz}{r^5}$$
$$E_y = \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{3yz}{r^5}$$
$$E_z = \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0}\frac{3z^2-r^2}{r^5}$$

(ここで $2qd \equiv p$ は双極子(dipole)モーメント)

1.1　別な考察

$$\text{電位 } \phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad \cdots \star$$

近似：

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2+(z\mp d)^2\right)^{-\frac{1}{2}} &\simeq (x^2+y^2+z^2\mp 2zd)^{-\frac{1}{2}} \\ &= r^{-1}\left(1\mp\frac{2zd}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= r^{-1}\left(1\mp\frac{zd}{r^2}\right)\end{aligned}$$

よって、

$$\star \ \to \ \phi(x,y,z) \simeq \frac{2qzd}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{r^3}$$

次に、$\boldsymbol{E}(x,y,z) = -\nabla\phi(x,y,z)$ を用いて $\boldsymbol{E}$ を求める。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3x}{r^5},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3y}{r^5},\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3z}{r^5}$$

より、[*1]

$$\begin{aligned}
E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3xz}{r^5} \\
E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3yz}{r^5} \\
E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r^3} + z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right\} \\
&\phantom{= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3z^2 - r^2}{r^5}
\end{aligned}$$

よって同じ結果が得られる。

1.2 コメント

$l = 2$ の場合の球面調和関数と同じ関数型が得られる。<u>これはなぜか？</u>

1.3 別な考察 (advance)

一般に、

$$\phi((r)) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{x'})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x'}|}d^3\boldsymbol{x'} \ \cdots \ \star$$

となる。

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x'}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x'^2 - 2rx'\cos\theta}} \ (r > a > x')$$

$\frac{x'}{r}$ のべき級数に展開

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x'}|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{x'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)$$

↑ ルジャンドルの多項式

$\cos\theta = x$ として、

$$\left.\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
&\vdots
\end{aligned}\right) \to P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l$$

[*1]

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^n) = \frac{d}{dr}(r^n)\frac{\partial r}{\partial x} = nr^{n-1}\frac{x}{r} = nxr^{n-2}$$

$$\star \to \phi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int \rho(x) x^l P_l(\cos\theta) dx \quad r > a$$

多重極展開という。

$$\begin{aligned}
l = 0 \to \quad \phi_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(x) d^3x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \\
l = 1 \to \quad \phi_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int x\rho(x) \cos\theta d^3x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{x}) \rho(x) d^3x \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n}}{r^2} \qquad\qquad (\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|})
\end{aligned}$$

双極子モーメント

$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{x} \rho(x) d^3\boldsymbol{x}$$