

[数理科学]

以下の問 (1) ～ (3) に答えよ.

(1) 以下の問(a)～(e)に答えよ. 真空中の透磁率は  $\mu_0$  である.

図1のように真空中に十分に長い均一な導線 (半径  $r_1$ ) があり,  $z$  軸に沿って電流を流した.

(a) このとき,  $z$  軸方向の電流の向きに対し, 導線の周りに発生している磁場

の向きを図示せよ. また, 電流とそのまわりにできる磁場との関係をあら

わす電磁気学の基本法則の名称をあげよ.

(b) このとき, 電流密度  $J$  において発生している磁場について中心軸からの距

離  $r$  に対する磁場の強さ  $H$  を表す式を示せ.

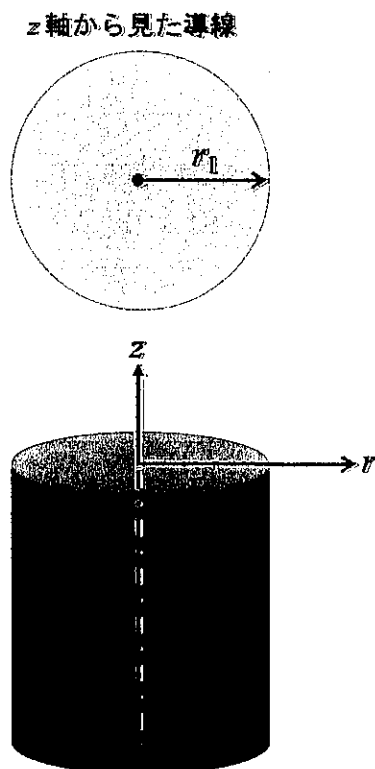


図1. 導線

図1の導線(半径 $r_1$ )の周りに中空の導体(内半径 $r_2$ , 外半径 $r_3$ )を用意して, 図2のように中心軸を揃えて同軸ケーブルを作製した.

- (c) 内側の導線のみ $z$ 軸に沿って電流を流した. このとき, 中心軸からの距離 $r$ に対する磁場の強さ $H$ と磁束密度 $B$ の変化を示すグラフの概形を図示せよ.
- (d) 外周の導体のみ $z$ 軸に沿って電流を流した. このとき, 電流密度 $J$ において発生している磁場について, 中心軸からの距離 $r$ での $H$ を求めよ.
- (e) 同軸ケーブルの一端の内側と外側を抵抗 $R$ を介して接続し, 他端に直流電源を用いて電圧 $V$ を印加した. このとき, 中心軸からの距離 $r$ での $H$ を求めよ.

$z$  軸から見た同軸ケーブル

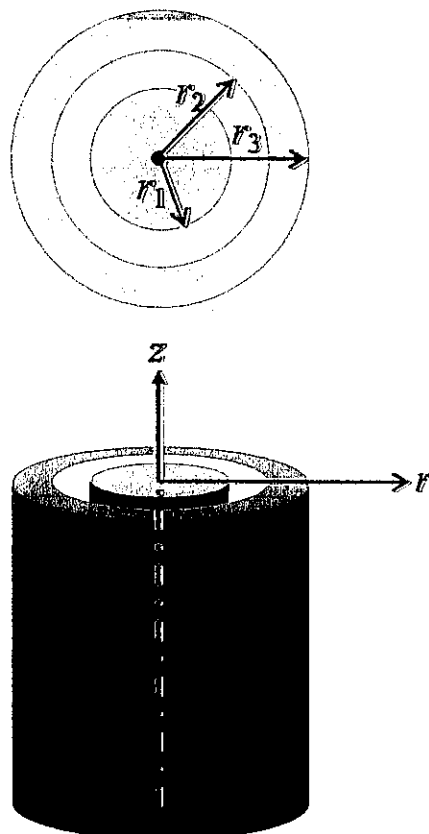


図2. 同軸ケーブル

(2) 以下の問(f)~(i)に答えよ.  $i$  を虚数単位とする.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

- (f) 行列  $A, B, C$  について行列式の値を求めよ.
- (g) 行列  $A, B$  が正則かどうか判定し, 正則の場合は逆行列を求めよ.
- (h) 行列  $C$  がエルミート行列であることを示せ.
- (i) 行列  $C$  をユニタリ行列によって対角化せよ.

(3) 以下の問(j)~(l)に答えよ.  $i$  を虚数単位とする.

$z$  軸方向で一様な磁場中の電子のエネルギーは2準位に分裂し, 以下のパウリ行列  $\sigma_n$  を使って電子スピン行列  $s_n$  を定めることができる.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$s_n = \frac{\hbar}{2} \sigma_n \quad (n = 1, 2, 3)$$

- (j) 行列  $s_3$  について固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ.
- (k)  $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$  とし,  $s^2$  を求めよ.
- (l)  $s_3$  と  $s^2$  の固有状態の関係を量子力学に基づいて物理的に解釈せよ.

[Physics and Mathematics]

Answer problems (1) ~ (3).

(1) Answer questions (a)~(e). The vacuum magnetic permeability is written as  $\mu_0$ .

As given in Figure 1, there is a sufficiently long wire (radius  $r_1$ ) in vacuum, and a current is flowing along the  $z$ -axis.

- (a) Draw the direction of the magnetic field, generated around the conductor with respect to the direction of the current in the  $z$ -axis direction. Name the basic law of electromagnetism that describes the relationship between electric current and the magnetic field created around it.
- (b) For the magnetic field generated around the current density  $J$ , give the magnetic field strength,  $H$ , as a function of the distance  $r$  from the central axis.

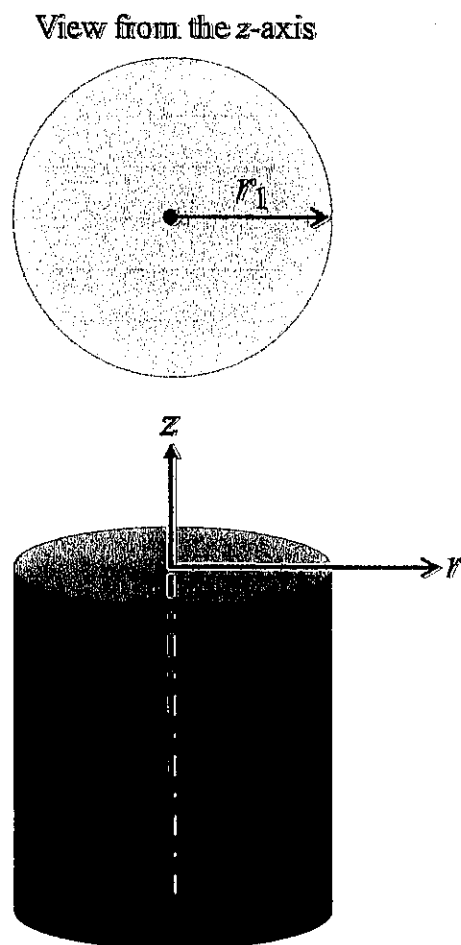


Figure 1. A conductor wire

The long wire (radius  $r_1$ ) in Figure 1 is surrounded by a hollow conductor (inner radius  $r_2$ , outer radius  $r_3$ ), as shown in Figure 2, to fabricate a coaxial cable.

- (c) Assuming that current is passed along the  $z$ -axis only through the inner cylindrical conductor, draw the outline of a graph showing the changes in magnetic field strength,  $H$ , and magnetic flux density,  $B$ , with respect to distance  $r$  from the central axis.
- (d) Assuming that current is passed along the  $z$ -axis only through the outer conductor, give the magnetic field strength,  $H$ , at distance  $r$  from the central axis for the magnetic field generated at current density  $J$ .
- (e) Between the inside and outside conductors, one terminal of the coaxial cable is connected with a DC power supply with a voltage,  $V$ , while the other terminal is connected with a resistor,  $R$ . Give the magnetic field strength,  $H$ , at the distance  $r$  from the central axis.

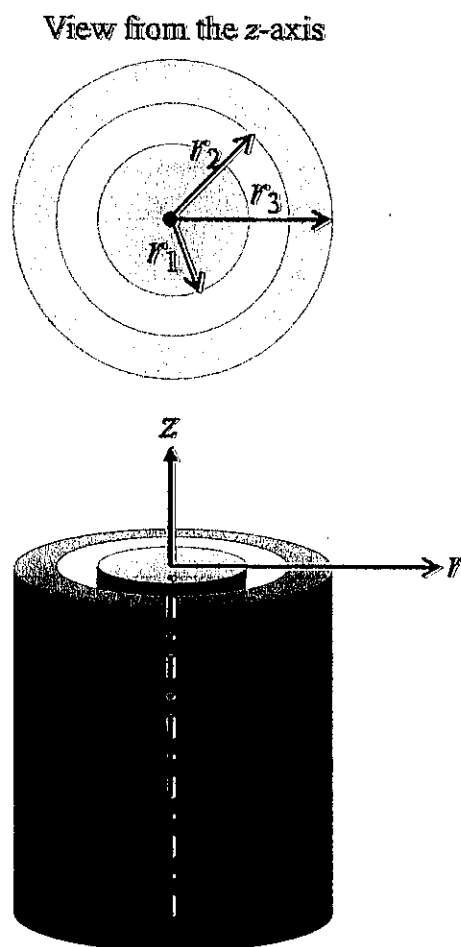


Figure 2. A coaxial cable

(2) Answer questions from (f) to (i). The imaginary unit is represented by  $i$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

(f) Give the value of the determinant for matrices,  $A$ ,  $B$ , and  $C$ .

(g) Judge whether the matrices  $A$  and  $B$  are regular or not. If the matrix is regular, give the inverse matrix.

(h) Explain why that the matrix  $C$  is Hermitian.

(i) Diagonalize the matrix  $C$  by a unitary matrix.

(3) Answer questions from (j) to (l). The imaginary unit is represented by  $i$ .

An electron in a uniform magnetic field in the  $z$ -axis direction energetically splits into two levels, and the electron spin matrix  $s_n$  can be determined using the Pauli matrix  $\sigma_n$ , as given below.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$s_n = \frac{\hbar}{2} \sigma_n \quad (n = 1, 2, 3)$$

(j) Give an eigenvalue and an eigenvector of the matrix  $s_3$ .

(k) Calculate  $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$ .

(l) Give a physical interpretation on the eigenstates of  $s_3$  and  $s^2$ , based on quantum mechanics.