[数理科学]

以下の問（１），（２）に答えよ．本問中では真空の誘電率（電気定数）を ε_0 ，真空の透磁率（磁気定数）を μ_0 とする．

（１）静電場に関する以下の問 (a)〜(c) に答えよ．

(a) 真空中に点電荷 $+q$ がある．この点電荷によって作られる電場の大きさ E および静電ポテンシャル（電位）ϕ は点電荷からの距離 r の関数として表すことができる．E, ϕ を求めよ．ただし $r \to \infty$ で $\phi = 0$ とする．

(b) 空間的に一様な電荷密度 ρ で帯電している誘電体の球が真空中に存在する．球の誘電率を ε ，半径を a とする．球の中心からの距離 r の関数として，電場の大きさ E および静電ポテンシャル ϕ を表すことができる．$r \geq 0$ の範囲で，E, ϕ を求めよ．ただし $r \to \infty$ で $\phi = 0$ とする．

(c) 図１に示すように，問 (b) の帯電した球を，内半径 b, 外半径 c $(a < b < c)$ の導体の球殻で覆った．帯電球の中心と球殻の中心は一致している．なお，この球殻は帯電していない．電場の大きさ E は球の中心からの距離 r の関数として表すことができる．$r \geq 0$ の範囲で, E をグラフに描け．E の具体的な値の記入は不要だが，グラフ中に a, b, c を示せ．

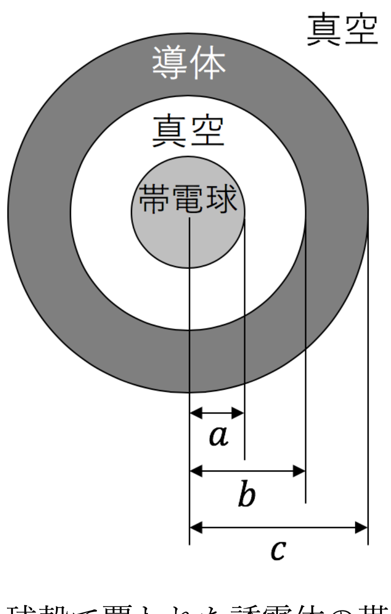

図１．導体の球殻で覆われた誘電体の帯電球の断面図

（2）真空中における Maxwell 方程式は次の 4 つの式 (1)〜(4) で表される．ここで電場 $\vec{E}$，磁場 $\vec{B}$，電荷密度 ρ，電流密度 $\vec{j}$ はいずれも，位置 $(x,\ y,\ z)$ および時間 t の関数である．以下の問 (d)〜(g) に答えよ．ただし $\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ はベクトル演算子である．

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \qquad (4)$$

(d) 式 (3) は（　ア　）の（　イ　）の法則を表している．（　ア　）に当てはまる人名および（　イ　）に当てはまる物理現象を答えよ．

(e) 真空中に電荷も電流も存在しない場合を考える．Maxwell 方程式をもとに，以下の電磁波の波動方程式 (5) を導け．ただし，任意のベクトル $\vec{A}$ に対して式 (6) が成り立つことを用いてよい．また，光速 c を ε_0 および μ_0 を用いて表せ．

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \qquad (5)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}\ , \qquad (6)$$

ただし $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(f) 波動方程式 (5) の解の一例として，z 軸方向に進む平面波がある．この電磁波の電場が $\vec{E}(z,t) = \overrightarrow{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$ と表されるときに k と ω の間に成り立つ関係式を求めよ．

(g) 電磁波が横波であること，および電磁波の電場と磁場が直交することを，問 (f) の平面波の場合について示せ．

[Physics and Mathematics]

Answer problems (1) and (2) below. In the following problems, ε_0 denotes the permittivity of vacuum (or the electric constant), and μ_0 denotes the magnetic permeability of vacuum (or the magnetic constant).

(1) Answer the following problems (a)–(c) concerning electrostatic field.

(a) A point charge is placed in vacuum. The electric field magnitude E and the electrostatic potential ϕ can be expressed as a function of the distance r from the point charge. Find E and ϕ, under the condition that $\phi = 0$ for $r \to \infty$.

(b) A dielectric sphere charged uniformly with an electric charge density ρ is placed in vacuum. The sphere has a permittivity ε and a radius a. The electric field magnitude E and the electrostatic potential ϕ can be expressed as a function of the distance r from the center of the sphere. Find E and ϕ for $r \geq 0$, under the condition that $\phi = 0$ for $r \to \infty$.

(c) See Fig. 1. The charged sphere as mentioned above in problem (b) is now confined in a spherical shell that is made of conductor, with an inner diameter b and an outer diameter c ($a < b < c$). The charged sphere and the spherical shell are placed concentrically. The spherical shell is not electrically charged. The electric field magnitude E and the electrostatic potential ϕ can be expressed as a function of the distance r from the center of the sphere. Draw E on a graph for $r \geq 0$. Specify a, b and c in the graph. Values of E do not need to be specified in the graph.

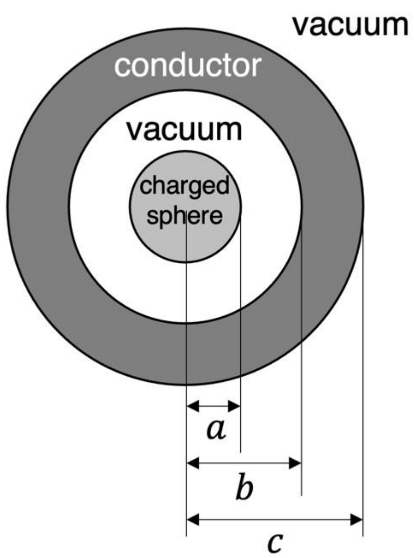

Fig. 1. A cross-sectional view of the charged dielectric sphere covered by the spherical-shell conductor.

(2) The following four Equations (1)–(4) are known as Maxwell equations for vacuum, where the electric field $\vec{E}$, magnetic field $\vec{B}$, electric charge density ρ and electric current density $\vec{j}$ are all functions of position $(x,\ y,\ z)$ and time t. Answer the following problems (d)–(g). Note that $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ is a vector operator.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \qquad (4)$$

(d) The Eq. (3) above expresses (A)'s law of (B).
Name a scientist for (A) and a physical phenomenon for (B).

(e) The wave equation for electromagnetic waves can be obtained by considering a case where the vacuum has no electric charge nor electric current. Derive the wave equation, Eq. (5), based on the Maxwell equations. You can use Eq. (6) which holds for any vector $\vec{A}$. Also, express the light speed c using ε_0 and μ_0.

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \qquad (5)$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}\ , \qquad (6)$$

where $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

(f) One of the solutions for the wave equation, Eq. (5), is a plane wave propagating in the z direction. Suppose that the electric field is expressed as $\vec{E}(z,t) = \vec{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$, find a necessary relation between k and ω.

(g) Show that the electromagnetic wave is a transverse wave, and that the electric and magnetic fields are orthogonal, for the case of the plane wave in problem (f) above.