[数理科学]

以下の問（1）～（8）に答えよ．

図1に示す xy 座標系において，質点1と質点2によって構成された二重振り子を考える．質点1は原点Oに固定された長さ l の糸1で吊るされ，質点2は質点1に固定された長さ l の糸2で吊るされている．質点1, 2は xy 平面内で運動し，それらの質量はともに m とする．また，糸1, 2の y 軸に対する角度をそれぞれ θ_1, θ_2 とし，重力加速度の向きは y 軸方向で，その大きさを g とする．なお，振り子の回転軸まわりの摩擦，糸1, 2の質量，および，空気抵抗は無視し，糸はたわまないものとする．

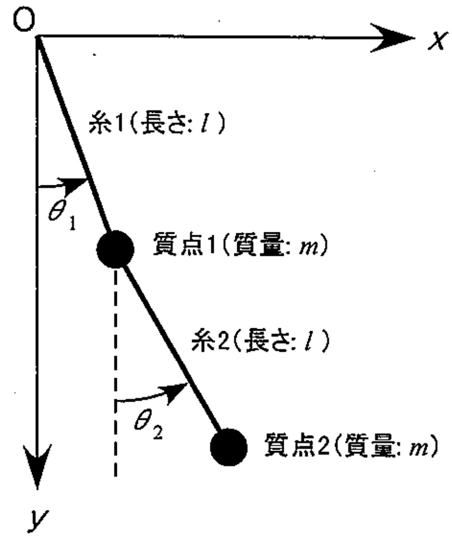

図 1．二重振り子の概略図

（1） 系のポテンシャルエネルギー V を $\theta_1, \theta_2, m, l, g$ を用いて表せ．ただし，$y=0$ での重力ポテンシャルをゼロとする．

（2） 系の運動エネルギー T を $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, m, l$ を用いて表せ．ただし，$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ はそれぞれ θ_1, θ_2 の時間に関する導関数である．

（3） 系のラグランジアン $L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = T - V$ を変数 $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ について多項式展開すると，振り子の振動が微小振動であるとき，3次以上の項を無視することができる．このときの L を $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, m, l, g$ を用いて表せ．

以下の問（4），（7），（8）では，<u>振り子の振動を微小振動と近似</u>して解答すること．

（4） この二重振り子について，θ_1, θ_2 が満たすべき微分方程式を

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} \qquad \text{（式1）}$$

と表すとき，行列 A は

$$A = \frac{g}{l}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix} \qquad \text{（式2）}$$

で与えられることを示せ．

（5） （式2）で与えられる行列 A が次の関係式を満たすとき，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{（式３）}$$

行列 P と固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

（６） 次に示す微分方程式の一般解を示せ．

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda z \qquad \text{（式４）}$$

ただし，z は t の実関数で，λ は正の定数とする．

（７） 時刻 $t = 0$ において $\theta_1 = 0, \theta_2 = a, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ であるとき，t の関数 $\theta_1(t), \theta_2(t)$ を，$t, a, \lambda_1, \lambda_2$ を用いて表せ．

（８） 時刻 $t = 0$ において $\theta_2 = a, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ として，振り子を振動させた．この運動に対して，質点２の x 座標 $(x_2(t))$ を t について Fourier 変換したところ，角周波数 (ω) のスペクトル上に，$\omega = \sqrt{\lambda_1}$ のピークが１本だけ現れた．このときの $x_2(t)$ を，t, a, λ_1, l を用いて表せ．