[数学標準]

以下の問（1）～（7）に答えよ.

微分方程式を積分方程式に変形した後に解く方法がある．実変数 t の連続な関数 $y(t)$ に対する２階の常微分方程式 ① を考える.

$$y''(t) + A(t)y'(t) + B(t)y(t) = g(t) \qquad ①$$

ここで，$y''(t)$ および $y'(t)$ はそれぞれ $y(t)$ の t に関する２階および１階の導関数を表す．$A(t)$, $B(t)$ および $g(t)$ は実変数 t の連続な関数である．初期条件は

$$y(a) = y_0, \qquad y'(a) = y_1 \qquad ②$$

で与えられるものとする.

（1） 式 ① を積分することによって，次式を導け．計算の過程も記せ.

$$\begin{aligned} y(t) = &-\int_a^t \mathrm{d}\tau\, A(\tau)y(\tau) - \int_a^t \mathrm{d}\tau \int_a^\tau \mathrm{d}\sigma\, \{B(\sigma) - A'(\sigma)\}y(\sigma) \\ &+ \int_a^t \mathrm{d}\tau \int_a^\tau \mathrm{d}\sigma\, g(\sigma) + \{A(a)y_0 + y_1\}(t-a) + y_0 \end{aligned} \qquad ③$$

（2） 両辺を微分することによって，次式が成立することを証明せよ．ここで，$h(\tau)$ は実変数 τ の関数である.

$$\int_a^t \mathrm{d}\tau \int_a^\tau \mathrm{d}\sigma\, h(\sigma) = \int_a^t \mathrm{d}\tau\, (t-\tau)h(\tau) \qquad ④$$

（3） 関係式 ④ を使って，式 ③ が

$$\begin{aligned} y(t) = &-\int_a^t \mathrm{d}\tau\, \{A(\tau) + (t-\tau)[B(\tau) - A'(\tau)]\}y(\tau) + \int_a^t \mathrm{d}\tau\, (t-\tau)g(\tau) \\ &+ [A(a)y_0 + y_1](t-a) + y_0 \end{aligned} \qquad ⑤$$

と書けることを示せ．計算の過程も記せ.

式 ⑤ には初期条件が適切に取り込まれているので

$$K(t,\tau) = -\{A(\tau) + (t-\tau)[B(\tau) - A'(\tau)]\} \qquad ⑥$$

$$f(t) = \int_a^t \mathrm{d}\tau\,(t-\tau)g(\tau) + [A(a)y_0 + y_1](t-a) + y_0 \qquad ⑦$$

と記すことで，与えられた常微分方程式 ① は，次の積分方程式に変形されることがわかる．

$$y(t) = \int_a^t \mathrm{d}\tau\, K(t,\tau)y(\tau) + f(t) \qquad ⑧$$

次に，式 ⑨ で表される $y(t)$ に対する２階の常微分方程式を解くことを考える．

$$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0 \qquad ⑨$$

初期条件は

$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = -4 \qquad ⑩$$

で与えられるものとする．

（４） 式 ⑧ を導いた方法にならって，式 ⑨ を積分方程式に書き直せ．

（５）関数 $h(t)$ に対して，複素数 s を使って，次式によって定義される積分

$$\hat{h}(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-st}h(t) \equiv \mathcal{L}\{h(t)\} \qquad ⑪$$

を $h(t)$ のラプラス変換と呼ぶ．式 ⑪ にしたがって，$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\}$ を求めよ．ただし，a は実数とし，式 ⑪ で表される積分は収束するものとする．計算の過程も記せ．

（６） 問（４）で導いた積分方程式を使って，$y(t)$ のラプラス変換 $\hat{y}(s)$ を求めよ．計算の過程も記せ．

（７） 問（５），（６）の結果を使って，常微分方程式 ⑨ の解 $y(t)$ を求めよ．