

[数学基礎]

以下の問 (1), (2) に答えよ.

(1) 3 次の正方行列  $A, B, P$  について考える. ある行列  $A$  について, 行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{を用いると, } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{と書くことができた. こ}$$

こで,  $a$  はある特定の実数である. 以下の問に答えよ.

- (a)  $P$  の行列式の値を求めよ.
- (b)  $P$  の逆行列  $P^{-1}$  を求めよ.
- (c)  $C = B - aI$  で定義される 3 次の正方行列  $C$  について,  $C^2$  を求めよ. ここで,  $I$  は 3 次の単位行列を表わす.
- (d)  $B^n$  を求めよ. 但し,  $n$  は正の整数とする.
- (e)  $A^n$  を求めよ. 但し,  $n$  は正の整数とする.

(2) 実数  $x, y$  を用いて表される関数  $g(x, y) = 4x^2 + 6xy + 4y^2$  について考える.

- (f) 2 成分の列ベクトル  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  と 2 行 2 列の対称行列  $M$  を用いて  $g = {}^t\mathbf{x}M\mathbf{x}$  と表わせるとする.  $M$  を求めよ. 但し,  ${}^t\mathbf{x}$  は  $\mathbf{x}$  の転置をとった行ベクトルを表わす.
- (g)  $M$  の固有値と規格化された固有ベクトルを求め,  $M$  を対角化せよ.
- (h)  $g(x, y) = 7$  の条件下で,  $x^2 + y^2$  の最大値と最小値を求めよ.