[数学標準]

以下の問（1）～（8）に答えよ.

ガンマ関数$\Gamma(x)$とベータ関数$B(x,y)$は実数tを用いて次のように定義される.

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x>0) \qquad \text{（式１）}$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (x>0, y>0) \qquad \text{（式２）}$$

（１）$\Gamma(1)=1$　および　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$　であることを示せ. ただし, $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を用いてもよい.

（２）次式を証明せよ.

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad \text{（式３）}$$

（３）nが正の整数のときに, 次式を証明せよ.

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad \text{（式４）}$$

（４）次式を証明せよ.

$$B(x,y)=B(y,x) \qquad \text{（式５）}$$

（５）次式を証明せよ.

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \text{（式６）}$$

（６）$B\left(x,\frac{1}{2}\right)$と$B(x,x)$の間の関係を導け. なお,（式２）において$t=u^2$の変数変換を行い, その後, $s=\frac{1+u}{2}$の変数変換を用いよ.

（７）$2^{2x-1}\dfrac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2x)}$　が定数となることを示し, その値を求めよ.

（８）定積分$I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$をベータ関数を用いて表し, その値を求めよ.