[数学基礎]

行列式に関する以下の説明文を読み，問（1），（2）に答えよ．

2次の実正方行列 A の行列式を考える．行列 A の要素を明示して書けば，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{（式1）}$$

となる．行列 A の行列式 $\det(A)$ は以下のように余因子展開できることが知られている．

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}\,\tilde{a}_{ik} = \sum_{l=1}^{2} \tilde{a}_{lj}\,a_{lj} \qquad (i,j = 1,2) \qquad \text{（式2）}$$

ここで，余因子 $\tilde{a}_{ij}$ は行列 A の(i,j)要素 a_{ij} に対応した余因子である．すなわち，行列 A から第 i 行と第 j 列を消去することで残る行列要素を $[A]_{ij}$ と書くとき，

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\,[A]_{ij} \qquad \text{（式3）}$$

で定義される．ここで，2次の実正方行列

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{（式4）}$$

を随伴行列と呼ぶ．

（1）行列 A の各要素が実変数 x の関数であるとき，行列式 $\det(A)$ の微分について考える．以下の問 (a), (b) に答えよ．

(a) 次式が成立することを示せ．

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial x} = \mathrm{Tr}\left[\mathrm{adj}(A)\frac{\partial A}{\partial x}\right] \qquad \text{（式5）}$$

ただし，記号 Tr は対角和（トレース）を示し，例えば，

$$\mathrm{Tr}[A] = \sum_{j=1}^{2} a_{jj}$$

となる．また，行列 $\partial A/\partial x$ はその(i,j)要素が $\partial a_{ij}/\partial x$ である行列として定義されている．

(b) 行列 A の逆行列 A^{-1} が存在するとき，（式5）の右辺を $\det(A), \partial A/\partial x$, および A^{-1} を使って表現せよ．

（2）(i,j) 要素が行列 A の各要素の変分 δa_{ij} で与えられる２次の実正方行列を行列 A の変分行列として δA と表現する．行列式 $\det(A)$ の第一変分について考える．以下の問 (c)〜(f) に答えよ．

(c) 次式が成立することを示せ．

$$\delta \det(A) = \mathrm{Tr}[\mathrm{adj}(A)\delta A] \qquad \text{（式６）}$$

(d) 次式で定義される２次正方行列で表される関数 $A(x_1,x_2)$ を考える．

$$A(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) \end{bmatrix} \qquad \text{（式７）}$$

ここで，φ_1，φ_2 は実変数を引数とする実関数であり，x_1，x_2 は二つの実変数である．直接的に変分を計算することによって，関数 φ_1 の変化 $\varphi_1 \to \varphi_1 + \delta\varphi_1$ に伴う行列式関数 $\det(A(x_1,x_2))$ の第一変分 $\delta \det(A(x_1,x_2))$ を求めよ．計算の過程も示せ．

(e) （式６）を使って $\delta \det(A(x_1,x_2))$ を求めよ．計算の過程も示せ．

(f) 行列式が $\delta \det(A(x_1,x_2))$ を与える２次正方行列の一例を簡潔な形で示せ．