[物理学標準]

以下の問（1）～（7）に答えよ．

質量mの粒子が1次元調和振動子としてx軸上で運動している．この系の時間に依存しないシュレーディンガー方程式は以下の式で与えられる．

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi=E\psi$$

ここで，$\hbar$は換算プランク定数，ωは角振動数（固有振動数），Eはエネルギー固有値である．この粒子が基底状態と第一励起状態の重ね合わせの状態にあるとき，粒子の波動関数$\psi(x)$は以下の式で与えられる．

$$\psi(x)=(A+Bx)e^{-Cx^2}\quad (A,\ B,\ C\text{は定数})$$

以下の問（1）～（5）に答えよ．ただし，解答に必要であれば以下の積分公式を使ってよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-kx^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{k}}\ ,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-kx^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k^3}}\qquad (k\text{は正の定数})$$

（1）定数Cを求めよ．
（2）基底状態のエネルギーE_0を求めよ．
（3）第一励起状態のエネルギーE_1を求めよ．
（4）基底状態の規格化された波動関数$\psi_0(x)$を求めよ．
（5）第一励起状態の規格化された波動関数$\psi_1(x)$を求めよ．

粒子の波動関数が$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)$で表されるとき，以下の問（6）および（7）に答えよ．問（1）～（5）の結果を用いてよい．

（6）粒子のエネルギーの期待値$\langle H\rangle$を求めよ．
（7）粒子の位置の期待値$\langle x\rangle$を求めよ．