[物理学基礎]

図１のような一次元の無限の高さを持つ井戸型ポテンシャルの中で運動する一つの粒子（質量m）の量子状態を考える．この粒子のシュレーディンガー方程式は以下の式で与えられる．

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+V\Psi$$

ただし，$\hbar=h/2\pi$（hはプランク定数），$\Psi(x,t)=\psi(x)\exp(-iEt/\hbar)$とする．以下の問（１）～（６）に答えよ．必要であれば，以下の積分式を用いよ．

$$\int x^2\cos ax\,dx=\frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin ax+\frac{2x}{a^2}\cos ax,\quad \int x^2\sin ax\,dx=\frac{2-a^2x^2}{a^3}\cos ax+\frac{2x}{a^2}\sin ax$$

（１）粒子の規格化された定常状態の波動関数$\psi_n(x)$を求めよ．ここで，nは量子数（$n=1,2,3,\ldots$）である．

（２）粒子のエネルギー固有値E_nを求めよ（$n=1,2,3,\ldots$）．

（３）量子数nの固有状態にある粒子の位置の期待値$\langle x\rangle$と位置の二乗の期待値$\langle x^2\rangle$を求めよ．

（４）量子数nの固有状態にある粒子の運動量の期待値$\langle p\rangle$と運動量の二乗の期待値$\langle p^2\rangle$を求めよ．

（５）量子数nの固有状態にある粒子の運動に対して，以下の不確定性原理が満たされていることを示せ．

$$\Delta x\Delta p\geq\frac{\hbar}{2}$$

ここで，$\Delta x=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}$，$\Delta p=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}$である．

（６）粒子の初期状態として以下の波動関数を考える．

$$\Psi(x,0)=C(L^2-x^2),\quad -L\leq x\leq L$$

このとき，規格化定数Cを求め，時刻tにおける粒子の波動関数$\Psi(x,t)$を求めよ．

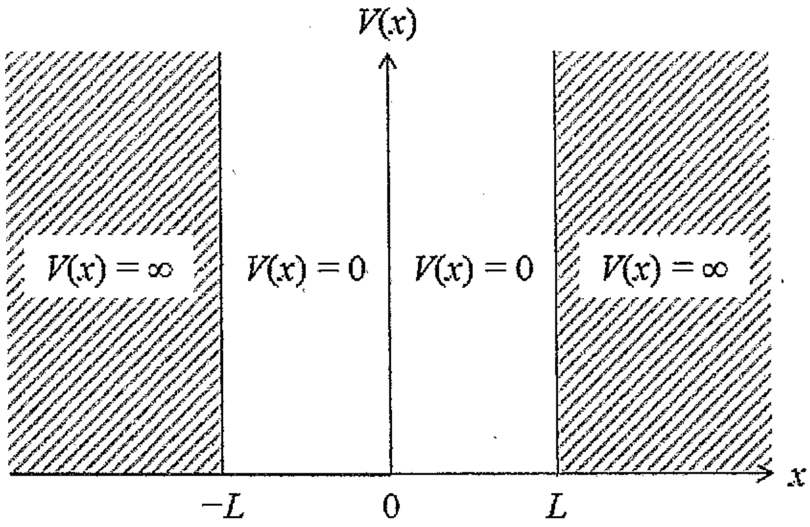

図１