[数学標準]

以下の問（1），（2）に答えよ．

（1） $y'(x) = f(x, y(x))$ で表される $x$ に関する 1 階の微分方程式を $y(x_0) = y_0$ の初期条件の下で解くことを考える．ここで，$f(x, y)$ は連続な実関数とする．

(a) 与えられた初期条件の下で $\varphi(x)$ が上記の微分方程式の解であることと，次の積分方程式

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}s \qquad \text{（式１）}$$

を満たしていることは同値であることを証明せよ．ただし，$\varphi(x)$ は連続な実関数とする．

積分方程式（式１）の解を以下の方法によって求める．それにはまず，近似解として $\varphi_0(x) \equiv y_0$ を考える．次に $\varphi_0(x)$ を（式１）の右辺に代入することで，$\varphi_1(x)$ を次式のように定義する．

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi_0(s)\big)\, \mathrm{d}s \qquad \text{（式２）}$$

この手続きを逐次的に繰り返すことで，関数列

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi_n(s)\big)\, \mathrm{d}s \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad \text{（式３）}$$

が定義される．この関数列の極限として積分方程式（式１）の解を求める方法を逐次近似法という．

(b) $y' = -2kxy$, $y(0) = 1$ に逐次近似法を適用して解を求めよ．ただし $k$ は実数とする．計算の過程も示すこと．

(c) $y' = -2kxy$, $y(0) = 1$ の解を変数分離の形を使った方法によって求めよ．ただし $k$ は実数とする．計算の過程も示すこと．

（２）分布関数 $g(x)$ に対して，そのフーリエ変換で表現される

$$\Omega(q) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{iqx}\, \mathrm{d}x \qquad \text{（式４）}$$

を $g(x)$ の特性関数と呼ぶ．$q$ は実数とする．次式で表される正規分布関数

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \qquad \text{（式５）}$$

の特性関数を考える．ただし，$\bar{x}$ と $\sigma$ は実数とする．

(d)（式５）で表される $g(x)$ を（式４）に代入すると $\Omega(q)$ は

$$\Omega(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}q^2 + iq\bar{x}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(x - i\frac{\sigma q}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \mathrm{d}x \qquad \text{（式６）}$$

と変形できることを示せ．

(e) $a$ を実数として，次の積分

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x+ia)^2]\, \mathrm{d}x \qquad \text{（式７）}$$

を考える．実数 $x, y$ を使って複素数 $z$ を $z = x + iy$ と表すとき，$\exp[-z^2]$ は正則な複素関数となる．図１に示された積分路を参考にして，$I(a)$ が $I(a) = I(0)$ を満たすことを示せ．

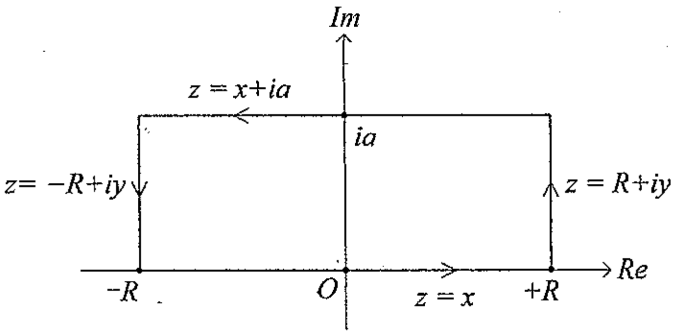


図１．積分路

(f) 公式 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2]\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ を使って，（式５）で表される正規分布関数 $g(x)$ の特性関数 $\Omega(q)$ を求めよ．