[数学基礎]

2 行 2 列の複素行列を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し, Pauli 行列と呼ぶ. 任意の 3 次元ベクトル $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ に対して

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma} \equiv v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} v_3 & v_1 - iv_2 \\ v_1 + iv_2 & -v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{（式１）}$$

とする. 2 行 2 列の単位行列を E とする. 以下の問（１）～（８）に答えよ.

答えに至る過程も記すこと.

（１）半径 1 の単位球面上の任意の点を表す 3 次元単位ベクトルを $\mathbf{e}$ とするとき, 極座標 θ, ϕ を用いて $\mathbf{e}$ を表せ. ただし, θ は $\mathbf{e}$ と z 軸のなす角, ϕ は $\mathbf{e}$ の xy 平面への正射影が x 軸となす角とする. また, θ, ϕ の定義域もそれぞれ示せ.

（２） 2 行 2 列の行列 $A = \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ を θ, ϕ を用いて記せ.

（３）行列 A の固有値を求めよ.

（４）問（３）で求めた固有値のうち, 正の固有値に対応する規格化された固有ベクトルを求めよ. ただし, $\theta = 0$ で $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるように決定せよ.

以上のように, 3 次元空間において, 2 成分の複素数からなる 2 次元ベクトルは 1926 年に Pauli によって導入され, スピノールと呼ばれている.

次に, 原点を中心とした任意のスピノールの回転を考える. y 軸を中心として θ だけ回転し, その後 z 軸を中心に ϕ だけ回転させる 2 行 2 列の複素行列（演算子）$R(\theta,\phi)$ を下記のように記述する.

$$R(\theta,\phi) = R_z(\phi)\, R_y(\theta) = \exp\left(-i\frac{\sigma_3\phi}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_2\theta}{2}\right) \qquad \text{（式２）}$$

（5）Pauli 行列と任意の 3 次元ベクトル $\mathbf{v} = r\mathbf{e}$ の間に，以下の関係が成り立つことを示せ．ただし，r は正の実数とする．

$$\exp(-i\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = E\cos r - i(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin r \qquad \text{（式 3）}$$

（6）$\exp\left(-i\dfrac{\sigma_3\phi}{2}\right)$ の 2 行 2 列の行列の各成分を記せ．

（7）初期状態が $\boldsymbol{\lambda}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であったスピノールに対して，（式 2）による操作を施したときの 2 次元ベクトル $\boldsymbol{\lambda}_1 = R(\theta,\phi)\boldsymbol{\lambda}_0$ を求めよ．また，$\boldsymbol{\lambda}_1$ が問（4）で求めた固有ベクトルと比べて，ϕ に関する位相因子を除いて一致することを確かめよ．

（8）任意の 2 行 2 列の行列は，単位行列 E と Pauli 行列 σ_1，σ_2，σ_3 の 1 次結合によって表せることを示せ．