[物理学標準]

ラザフォード散乱について考える．図１に示すように，質量 m の質点Ａが無限遠から x 軸方向，正の向きに $y=b$（$b>0$）に沿って，速さ v_0 で入射する．質点Ａと原点Ｏの間に kr^{-2}（$k>0$）の斥力が作用する時，以下の問（１）～（８）に答えよ．

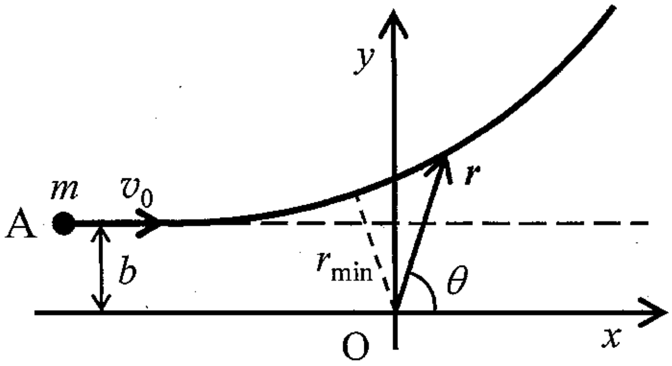

図１

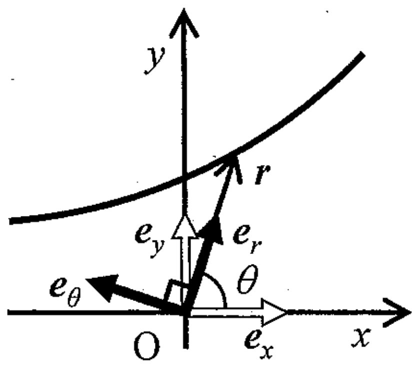

図２

（１）中心力のみが質点Ａに作用する系に対して，図２に示すように（$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$）を二次元単位ベクトルとする座標系から，動径方向 r と回転方向 θ の単位ベクトル（$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$）を用いる平面極座標系へと変換する．図２に基づき，$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, θ などを用いて $\boldsymbol{e}_r$ および $\boldsymbol{e}_\theta$ をそれぞれ表せ．

（２）以下の（式１）および（式２）が成り立つことを示せ．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta \qquad \text{（式１）}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r \qquad \text{（式２）}$$

（３）位置ベクトル $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$ を時間について微分し，図１の質点Ａに斥力 $\boldsymbol{F}=kr^{-2}\boldsymbol{e}_r$ のみが作用する場合の動径方向および回転方向の運動方程式をそれぞれ求めよ．

（４）問（３）で得た回転方向の運動方程式から，角運動量の大きさ L が時間変化しないことを示せ．

（５）L を m, b, v_0 を用いて表せ．

（６）図１の質点Ａのもつ全エネルギー E を r, $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, L が含まれる式で表せ．ただし，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ および v_0 を用いてはならない．

（７）問（６）で求めた式を用いて，質点Ａが原点Ｏに最近接する時の距離 $r_{\min}$ を求めよ．

（８）一方，運動方程式から原点Ｏからの距離 r が θ の関数として以下の（式３）で表される．

$$\frac{1}{r} = -\frac{k}{mb^2v_0^2}\left\{\sqrt{1+\frac{m^2b^2v_0^4}{k^2}}\cos\left[\theta+\tan^{-1}\left(\frac{mbv_0^2}{k}\right)\right]+1\right\} \qquad \text{（式３）}$$

（式３）を用いて最近接距離 $r_{\min}$ を求め，問（７）の結果と等しくなることを示せ．