[数学基礎]

$t$ に関する２階の線形常微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)+2\frac{d}{dt}x(t)+x(t)=0 \qquad \text{（式１）}$$

を考える．この微分方程式は，１階の連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} \qquad \text{（式２）}$$

と等価である．これらの方程式を以下に従って解け．初期値を $\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ とする．

（１）（式２）の解を以下に従って求めよ．

(a) 行列 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}$ の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めよ．

(b) 変換行列 $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$ を用いて，$P^{-1}AP$ を計算せよ．

(c) 問(b)の結果を用いて，（式２）の解を求めよ．

（２）（式１）の解を以下に従って求めよ．

微分演算子 $D\equiv\frac{d}{dt}$ を定義する．２次の多項式 $f(u)=au^2+bu+c$（$a,b,c$ は定数）において，$D$ を代入した場合は，$f(D)=aD^2+bD+c=a\frac{d^2}{dt^2}+b\frac{d}{dt}+c$ と記述できる．このとき，問(d)～(f) に示した式を証明せよ．

(d) $f(D)e^{\alpha t}=f(\alpha)e^{\alpha t}$

(e) $f(D)[e^{\alpha t}x(t)]=e^{\alpha t}f(D+\alpha)\,x(t)$

(f) 線形微分方程式 $(D-\alpha)^n x(t)=0$ の一般解は，

$$x(t)=(c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_n t^n)e^{\alpha t}.$$

ただし，$c_0,\ldots,c_n$ および $\alpha$ は定数とし，$n$ は正の整数とする．

(g) 上記の問(d)～(f)の結果を踏まえて，（式１）の解 $x(t)$ を求めよ．

（３）以下の常微分方程式の特殊解を求めよ．

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)+2\frac{d}{dt}x(t)+x(t)=te^{-2t}+e^{-t}$$