

[数学基礎]

(1) 行列  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  について考える. ただし,  $a, b$  は実数とする.

(a)  $\exp A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$  を示せ.

(b) 連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = 2x(t) - y(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

を初期条件  $x(0) = 3, y(0) = -1$  のもとで解け.

(2) 実数  $x, y$  について, 二次曲線

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8x - 8y + 2c = 0 \quad (\text{式 1})$$

を考える. ただし,  $c$  は実数の定数とする.

(c) 対称行列  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  について, 固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ) としたとき,

$$T^{-1}BT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{により } B \text{ を対角化する行列 } T \text{ が, } T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ と}$$

表わせることを示せ.

(d) (式 1) の二次曲線の形状を  $c$  の値によって分類せよ.

(e)  $c = 0$  の場合, (式 1) の二次曲線の概形を図示せよ. 途中の過程も記すこと.