[数学標準]

（1）基本区間$[-\pi,\pi]$で定義される周期2πをもつ関数$f(x)$に関して，以下の問(a)～(c)に答えよ．

(a) 関数$f(x)$のフーリエ級数展開 $f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$ において，

展開係数a_mとb_mが，

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx dx \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx dx \qquad (m=1,\ 2,\ \cdots)$$

と与えられることを示せ．

(b) 基本区間$[-\pi,\pi]$で$f(x)=|x|$と定義されるとき，フーリエ級数展開を求めよ．

ただし，$|x|$ は x の絶対値を表わす．

(c) (b)の結果を用いて

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

を示せ．

（2）次の定積分(d)～(f)を計算せよ．解答に至る計算過程も示すこと．

(d) $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$

(e) $\int_0^{\infty}x^n e^{-x}dx$ （nは正の整数）

(f) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$