

[数学基礎]

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値, および大きさが 1 に規格化された固有ベクトルを求めよ.

(2) 3 行 3 列の行列 P を用いて, 行列 A を $P^{-1}AP = \Lambda$ により対角化することができる. ここで, 行列 Λ は (1) で求めた固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$) を

対角成分とする対角行列 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ である. このときの行列 P

および逆行列 P^{-1} を記せ.

(3) $P^{-1}AP = \Lambda$ の関係から, $P^{-1}A^kP = \Lambda^k$ となることを示せ. この関係を用いて, 行列 A の k 乗 A^k を求めよ.

(4) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ を時刻 t の関数とし, $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を初期条件として, 行列 A を

用いた微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

の解を求めよ.