［物理学標準］

$x, y, z$ 軸に各辺が沿う一辺の長さ $L$ の立方体の空洞が，絶対温度 $T$ の熱平衡状態になっているとする．空洞の壁は完全な導体であると仮定すると，空洞に開けた小さな孔において観察される電磁波の放射（空洞放射）は黒体放射と等価である．空洞放射の放射エネルギーの分布を $\rho(\nu,T)$ とする．空洞の単位体積について，振動数が $\nu$ と $\nu+d\nu$ の間の電磁波の放射エネルギー $\rho(\nu,T)d\nu$ は次式で与えられる．

$$\rho(\nu,T)d\nu = \varepsilon(\nu,T)\, f(\nu)\, d\nu \qquad ①$$

ここで，$\varepsilon(\nu,T)$ は，絶対温度 $T$ の熱平衡状態において，振動数 $\nu$ を持つ１個の調和振動子の平均エネルギーを表す．また，$f(\nu)$ は，振動数が $\nu$ と $\nu+d\nu$ の間の振動数を持つ振動子の数を空洞の体積で割った値であり，モード密度と呼ばれる．

プランクは，“電磁波は調和振動子の集まりであり，その調和振動子の持つエネルギーは振動数 $\nu$ に比例する量の整数倍（$\varepsilon_n = nh\nu$；$n$ は $0$ 以上の整数，$h$ はプランク定数である．）に限られる．”という考え方を導入することにより，実測結果とよく一致する放射公式を得た．

以下の問いに答えよ．解答にいたる道筋を必ず示すこと．

（１）絶対温度 $T$ で熱平衡にある調和振動子のエネルギーが $\varepsilon_n$ である確率は $\exp(-\varepsilon_n/k_{\mathrm{B}}T)$ に比例するとする．ここで，$k_{\mathrm{B}}$ はボルツマン定数である．このこととプランクの考え方を用いることにより，

$$\varepsilon(\nu,T) = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T)-1} \qquad ②$$

となることを示せ．

（２）空洞の壁における境界条件により，電磁波の波数ベクトル $\mathbf{k}=(k_x,k_y,k_z)$ は量子化される．$\mathbf{k}=(k_x,k_y,k_z)$ が満たすべき条件を求めよ．

（３）（２）を用いて，波数ベクトルの大きさ $|\mathbf{k}|$ が $k$ と $k+dk$ の間の値を持つ状態の数を求めよ．ただし，電磁波には二つの偏光の自由度があることを考慮せよ．

（４）（３）で求めた式を用いて，$f(\nu)$ の具体的な表式を求めよ．

（５）$h\to 0$ の極限では，式①はどのように書き表せるか．

（６）空洞放射の単位体積あたりのエネルギー $\int_0^\infty \rho(\nu,T)d\nu$ は $T^\alpha$ に比例する．$\alpha$ を求めよ．