

[数学基礎]

(1)

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ について、すべての固有値と対応する単位固有ベクトルを求めよ.

(2)

$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ のとき、実対称行列 $A = (a_{ij})$ を用いて、2次形式 $F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ を定義する.
ここで、 F のとりうる最大値は A の固有値の最大値であり、 F のとりうる最小値は A の固有値の最小値であることを証明せよ.

(3)

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のとき、 $F = 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 2xz - 2yz$ を定義する. F のとりうる最大値と最小値、及び、それぞれの値をとる点 (x, y, z) を求めよ.

(4)

次の連立常微分方程式の解を求めよ.

$$\frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 4y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + y_2$$

ただし、 y_1 と y_2 は x の関数であり、 $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 0$ と与えられる.