［数学標準］

（１）大きい自然数 N に対して，その階乗 $N!$

$$N! = \prod_{k=1}^{N} k = N \times (N-1) \cdots 2 \times 1$$

は対数関数を使うことで，近似的に

$$N! = \exp\left[N \log_e N - N + 1\right] \qquad \text{(I)}$$

と評価することができる．Stirling の公式として知られている

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N \qquad \text{(II)}$$

は，(I)式をさらに近似したものである．

(a) このことを踏まえて，

$$\prod_{k=0}^{N} (2k+1)$$

の近似式を求めよ．ただし，(II)式を直接使うことは許さない．また，求めた過程も示せ．

（２）ガウス積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

である．ここで，2 次元ガウス関数

$$f(x, y) = \exp\left[-\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]$$

を考える．ここで，行列 $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

は実対称行列であり，その固有値はすべて正定値であるものとする．この条件の下で，次の座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を施し，新たな関数

$$g(X,Y) = f\left(x(X,Y), y(X,Y)\right)$$

を作る．ただし，θ は実数とする．

(b) この時，次の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y)dXdY$$

を行列 **A** を使って表せ.

(c) **A** が対角行列であり，かつ，$a_{11} = a_{22} > 0$ であったとする．このとき，$m+n$ が奇数ならば,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{m+n}}{\partial X^m \partial Y^n} g(X,Y)dXdY = 0$$

であることを証明せよ.