

[数学基礎]

行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  に関する以下の設問に答えよ。答えに至る過程も簡潔に記せ。

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 行列  $A$  のジョルダン標準形  $J$  と変換行列  $P$  を求めよ。ただし、 $P^{-1}AP = J$  とする。

(3)  $\det(\exp A)$  を求めよ。

(4) 行列  $A$  を係数とする線形連立微分方程式

$$\frac{d}{dx}\mathbf{f} = A\mathbf{f}, \quad \text{ただし } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad (\text{i})$$

について、

(a) 行列  $A$  のジョルダン標準形  $J$  と変換行列  $P$  を用いて、式(i)が

$$\frac{d}{dx}(P^{-1}\mathbf{f}) = J(P^{-1}\mathbf{f})$$

と書けることを示せ。

(b) 連立微分方程式(i)の一般解を求めよ。