

[数学標準]

(1) 次の定積分を計算せよ.

(a) $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx, \quad \alpha > 0$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(2) 以下の(c)~(e)の間に, 計算の過程も含めて答えよ.

(c) $\psi(r)$ を原点からの距離 r のスカラー関数とすれば, 微分方程式

$$\nabla^2 \psi(r) + E\psi(r) = 0 \text{ は}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \psi(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \psi(r) + E\psi(r) = 0 \quad (\text{i})$$

となることを示せ.

(d) $\psi(r) = CR(r)/r$ と置くと(C は定数), (i) 式は

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) + ER(r) = 0 \quad (\text{ii})$$

となることを示せ.

(e) 境界条件 $R(0) = 0, R(a) = 0$ のもとで, (ii) 式の固有値と固有関数を求めよ.

ただし, $E > 0$ とする.