[物理学標準]

スピン 1/2 の電子は磁気モーメントμ_mをもち，磁場 H の中におくとその磁場方向の成分は$\mu_m s$ ($s = \pm 1$)と書ける．今，自由電子 N 個から構成されている系が一様な磁場 H におかれ，温度 T に保たれているとする．このとき，以下の設問に答えよ．ただし，スピン間には相互作用はないものとする．

（1）この系の中の一電子が，波数 k と s で指定される状態 r にあるとき，そのエネルギーε_rは，運動エネルギーと Zeeman エネルギーで表される．ε_r を求めよ．ただし，電子の質量を m，Planck 定数を $\hbar$ とする．

（2）エネルギーεにおける Fermi 分布関数 $f(\varepsilon)$を示せ．ただし，Boltzmann 定数を k_B，化学ポテンシャルを μ とする．

（3）この系における Helmholtz 自由エネルギーF，および全磁気モーメントの磁場方向成分の平均値 Mは，以下で与えられる．ただし，μ は H の関数である．

$$F = N\mu - k_B T \sum_r \log_e(1 + e^{-\frac{\varepsilon_r - \mu}{k_B T}})$$

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{T,V,N}$$

(a) この系の状態密度を $D(\varepsilon)$とするとき，M は次式で与えられることを示せ．計算の過程も記すこと．

$$M = \mu_m \int_0^\infty \left(\frac{D(\varepsilon)}{2}\right)\left[f(\varepsilon - \mu_m H) - f(\varepsilon + \mu_m H)\right]d\varepsilon$$

(b) 3次元自由電子系において，Fermi エネルギーε_Fにおける状態密度 $D(\varepsilon_F)$を求める．まず，系の電子数 N を m，$\hbar$，系の体積 V，ε_Fを用いて示し，次に $D(\varepsilon_F)$ を，N，ε_Fを用いて示せ．計算の過程も記すこと．ただし，Zeeman エネルギーは，ε_F に比べて十分小さいものとする．

(c) この自由電子系の絶対零度における電子1個あたりの Pauli 常磁性磁化率χを，μ_m，ε_F を用いて示せ．計算の過程も記すこと．ただし，H は小さいため，分布関数 f については，Zeeman エネルギーの1次の項まで考慮した以下の式を用いよ．

$$f(\varepsilon \pm \mu_m H) = f(\varepsilon) \pm f'(\varepsilon)\mu_m H$$