[数学基礎]

（１）２次元平面上の直交する基底ベクトルを $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ として，次の２つの線形演算子 $\hat{R}(\theta)$, $\hat{S}(\eta)$ を考える．

$$\begin{cases} \hat{R}(\theta)\ \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \cos\theta + \vec{v}_2 \sin\theta \\ \hat{R}(\theta)\ \vec{v}_2 = -\vec{v}_1 \sin\theta + \vec{v}_2 \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{S}(\eta)\ \vec{v}_1 = \eta\ \vec{v}_1 \\ \hat{S}(\eta)\ \vec{v}_2 = \vec{v}_2 / \eta \end{cases}$$

ただし，θ，$\eta (>1)$ は実数である．原点を中心とする単位円上の点 $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$ について以下の設問に答えよ．

(a) $\vec{x}' = \hat{R}(\theta)\ \hat{S}(\eta)\ \vec{x}$ を求めよ．

(b) $\vec{x}$ が円周上を１周するとき，$\vec{x}'$ の軌跡と単位円との関係を直交座標 (x_1, x_2) 上に図示せよ．

（２）行列に関する以下の設問に答えよ．

(c) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を Pauli 行列と呼ぶ．２行２列の行列は3つの Pauli 行列と単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の線形結合で書けることを示せ．

（３）x の関数である N 次正方行列 $A(x) = (a_{ij}(x))$ $(1 \le i, j \le N)$ とその行列式

$|A(x)| = \sum_{P \in S_N} \mathrm{sign}(P)\ a_{1P(1)}(x) \cdots a_{NP(N)}(x)$ を考える．ここで，和は N 次の置換 P すべてについてとるものであり，$\mathrm{sign}(P) = 1$（P が偶置換のとき），$\mathrm{sign}(P) = -1$（P が奇置換のとき）である．以下の設問に答えよ．ただし，$A(x)$ の各要素 $a_{ij}(x)$ は x で微分可能であり，その行列式は $|A(x)| > 0$ とする．

(d) $$\frac{d}{dx}|A(x)| = \sum_{k=1}^{N} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1N}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx}a_{k1}(x) & \frac{d}{dx}a_{k2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}a_{kN}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1}(x) & a_{N2}(x) & \cdots & a_{NN}(x) \end{vmatrix} \qquad \text{(I)}$$ と書けることを示せ．

(e) 次の微分方程式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{|A(x)|}\frac{d}{dx}|A(x)| = \mathrm{tr}\left(A^{-1}(x)\frac{d}{dx}A(x)\right) \qquad \text{(II)}$$

ここで，B を任意の N 次正方行列 $B=(b_{ij})$ とするとき，$\mathrm{tr}(B)$ は対角要素の和 $\sum_{i=1}^{N} b_{ii}$ を意味する．

（f） B を x に無関係な N 次正方行列とし，$A(x)=e^{xB}$ を考える．計算の過程も明示し，行列式 $|A(x)|=|e^{xB}|$ を $\mathrm{tr}(B)$ を使って求めよ．