[数学標準]

以下の一連する（１）～（４）の設問に答えよ．

（１）積分の定義，いわゆる区分求積法により，$\int_a^b dx$ を求めよ．

（２）一般的な乗積演算では，$\prod_{i=1}^{n} f(i) = f(1)\times(2)\times\cdots\times f(n)$ である．ただし i, n は自然数で $f(i)$ は自然数を変数とする関数である．ここでは，連続的実変数 x の関数 $f(x)=e^x$ に指数法則を適用することにより，新たに連続的乗積演算を

$$\prod_a^b e^{dx} \equiv e^{\int_a^b dx} = e^{b-a} \tag{A}$$

と定義する．式(A)では，連続的乗積演算記号に従来の乗積記号Πを流用している．この約束によれば，一般の実関数 $f(x)>0$ に対する連続的乗積 $\prod f(x)^{dx}$ は

$$\prod_a^b f(x)^{dx} = \prod_a^b e^{\log f(x)dx} = e^{\int_a^b \log f(x)dx} \tag{B}$$

と書き表すことができる．積分の定義を適用して，式(B)の $e^{\int_a^b \log f(x)dx}$ が $\prod_a^b f(x)^{dx}$ に変形できることを示せ．

（３）$g(x)=\prod_a^x f(x)^{dx}$ のとき，$f(x)$ を $g(x)$ で表せ．

（４）ここで定義した連続的乗積演算を使って，$\prod_{i=1}^{n} 3i$ の近似式を求めよ．ただし，$n>>1$ とする．