相対論的電磁気学.

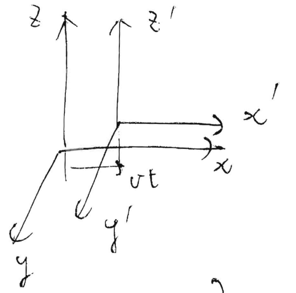
前提
$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\mathbb{D} = \rho \\ \mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\mathbb{H} = i + \dfrac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla^2 \mathbb{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \Box \mathbb{E} = 0$$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

・ガリレイ変換



$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} , \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}$$

もう一度ビブン
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{1}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right) + \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{-v}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - v\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + (-v)\left(\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} - v\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v\frac{\partial^2}{\partial t'\partial x'} + v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

ダランベルシアン $\Box = \Box' - \dfrac{2v}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial x'} + \dfrac{v^2}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x'^2}$ となる.

よって. $\Box \mathbb{E}(x, y, z, t) \neq \Box' E(x', y', z', t')$ 　　$\mathbb{H}$も同様

ガリレイ変換に対して Maxwell eqs. は不変でない.

・ローレンツ変換

光速一定 を仮定する. (Einstein)

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma\beta(ct) \\ y' = y \ , \ z' = z \\ ct' = -\gamma\beta x - \gamma(ct) \end{cases}$$

$\frac{v}{c} \to 0$ のとき. ガリレイ変換 と同じとなるべき.

$$\lim_{\frac{v}{c}\to 0} \gamma = 1 , \quad \lim_{\frac{v}{c}\to 0} \gamma\beta c = v \quad \longrightarrow \beta = \frac{v}{c}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\frac{\beta\gamma^2}{c}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \frac{\beta^2\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \beta^2\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\frac{\beta\gamma^2}{c}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'} + \frac{\gamma^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

よって $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{(\gamma^2-\beta^2\gamma^2)}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$

$\Box = \Box'$ となるには. 上式右辺にて. $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ が必要十分.

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \longrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

よって.
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \ , \ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

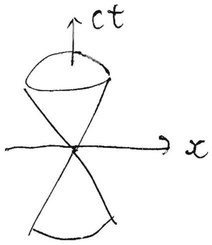
このとき.
$$\begin{cases} \Box E = \Box' E \\ \Box H = \Box' H \end{cases}$$

ローレンツ変換に対して 不変となる.

・光円すい

例 $s^2 = x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$

4次元ミンコフスキー時空.



$s^2<0 \longrightarrow$ 円すい内

$s^2>0 \longrightarrow$ 外

・計量マトリックス

x^μ ($\mu=1\sim4$) 反変ベクトル 上つき $x^\mu = (x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z,\ x^4=ct)$

$$x^{1'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}x^1 - \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}x^4$$

$$x^{2'}=x^2,\quad x^{3'}=x^3$$

$$x^{4'} = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}x^4$$

$$\longrightarrow a^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix}$$

これを用いて. $x^{\mu'} = \sum_{\nu=1}^{4} a^\mu{}_\nu x^\nu$ ($\mu=1\sim4$) もしくは $x^{\mu'} = a^\mu{}_\nu x^\nu$

x_μ ($\mu=1\sim4$) 共変ベクトル 下つき

$$x_\mu = (x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=-ct)$$

このとき $$b_\mu{}^\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix}$$

$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} b_\mu{}^\nu x_\nu$ ($\mu=1\sim4$) もしくは. $x_{\mu'} = b_\mu{}^\nu x_\nu$

微分 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, ~~ｍｍ~~ $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ とかける。

$\Box = \sum_{\mu=1}^{4} \partial_\mu \partial^\mu$ もしくは $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$

ミンコフスキー時空の長さ $s^2 = x^\mu x_\mu = x^{\mu'} x_{\mu'}$

2階のテンソル $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ を用いて $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$

計量テンソル $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$

$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ と書ける。

運動量 p^μ, p_μ について。

$p^\mu = (p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c})$

$p_\mu = (p_x, p_y, p_z, -\frac{E}{c})$ と定義する

$\sum_{\mu=1}^{4} p^\mu p_\mu = p^\mu p_\mu = \underbrace{\mathbb{P}^2}_{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$

$\mathbb{P}^2 = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

電磁場のポテンシャル

$\mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A}$ により、ベクトルポテンシャル $\mathbb{A}(x, y, z, t)$ を導入

$\mathrm{div}\,\mathbb{B} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = 0$ となっている。

$\mathrm{rot}\,\mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \mathrm{rot}\left(-\dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right)$ となるので

$\mathrm{rot}\left(\mathbb{E} + \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right) = 0$

ここで、便宜上、 $\mathbb{E} + \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\phi(x, y, z, t)$ と ϕ を導入する。

よって $\left.\begin{array}{l}\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l}\mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A} \\ \mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi\end{array}\right.$

$\mathbb{E}, \mathbb{B} \Longleftrightarrow \mathbb{A}, \phi$

実在　　　数学的。

任意のスカラー $\chi(x, y, z, t)$ として、

$$\mathbb{A}' = \mathbb{A} - \mathrm{grad}\,\chi$$
$$\phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

とできる。ゲージ不定性あり　ゲージ変換。

実際 $\mathrm{rot}\,\mathbb{A}' = \mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \mathbb{B}$

$-\mathrm{grad}\,\phi' - \dfrac{\partial \mathbb{A}'}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\phi - \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} = \mathbb{E}$ となり、式は成立する。

・ローレンツゲージ

$\mathbb{A}$ と ϕ には不定性あり

$\mathrm{div}\,\mathbb{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ を仮定する　　$\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \text{ に類似}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\,\mathbb{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\mathbb{D} = \rho \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \nabla^2\mathbb{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbb{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{i} \\ \nabla^2\phi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A} \\ \mathbb{E} = -\frac{\partial\mathbb{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi \end{array}\right\}$$

ローレンツゲージの下での Maxwell eqs.

・クーロンゲージ

$\mathrm{div}\,\mathrm{grad} \equiv \nabla^2$

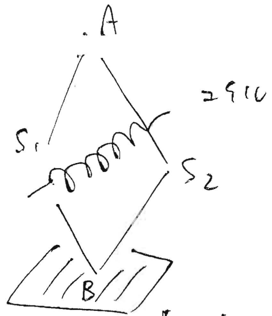
$\mathrm{div}\,\mathbb{A}' = \mathrm{div}\,\mathbb{A} - \mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,\chi$

$\rightarrow \mathrm{div}\,\mathbb{A}' + \nabla^2\chi = \mathrm{div}\,\mathbb{A} = 0$ となるように χ を選ぶ (クーロンゲージ)

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\mathbb{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbb{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\phi = -\mu_0 \boldsymbol{i} \\ \mathrm{div}\,\mathbb{A} = 0 \end{array}\right.$$

クーロンゲージの下での Maxwell eqs.

アハラノフ・ボーム効果 (AB効果)　J.J. Sakurai 2.7



干渉縞

電子線の干渉 ($\mathbf{B}$ なし)

$$\Delta\Phi = \frac{q}{\hbar}\oint_{AS_1BS_2A} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$$ の位相差が生じる

ド・ブロイ　$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$

ds 進むと、位相は $2\pi\frac{ds}{\lambda}$ 進む。

$A \to B$　$\frac{1}{\hbar}\int_{AS_1B} \mathbf{p}\cdot d\mathbf{s}$　となる。

ディラックの置換え　$\mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A}$

位相差　$$\frac{q}{\hbar}\int_{AS_1B} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} - \frac{q}{\hbar}\int_{AS_2B} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\hbar}\oint_{AS_1BS_2A} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$$

となる。

磁気単極子 (モノポール)　J.J. Sakurai p.182

静止した磁荷 ρ_m として

$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = \rho_m$ が成立てば、$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$ と対称性がよい。

実際は、ない。あるとすると、$\rho_m \to \frac{\hbar c}{2|e|}$ となる (理論的)
by Dirac

Maxwell方程式のテンソル表現

電磁場の共変性

反変ベクトル A^μ を、$A^1 = A_x$, $A^2 = A_y$, $A^3 = A_z$, $A^4 = \frac{\phi}{c}$ とする。

電流密度 i 3成分と電荷密度 ρ より

i^μ を $i^1 = i_x$, $i^2 = i_y$, $i^3 = i_z$, $i^4 = c\rho$ とする

ローレンツゲージの下では、

$\Box A^\mu = -\mu_0 i^\mu$ となる　　（$\Box$は ローレンツ変換不変）

ローレンツ条件 $\longrightarrow \partial_\mu A^\mu = 0$　　$\left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$

連続の式　$\partial_\mu i^\mu = 0$

共変ベクトル　$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ とする

$$A_1 = A^1,\ A_2 = A^2,\ A_3 = A^3,\ A_4 = -A^4 = -\frac{\phi}{c}$$

テンソル表現

2つの共変ベクトル $\partial_\mu A_\nu$ の積より、

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = -f_{\mu\nu}$$ をつくる。

例、

$$f_{11} = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^1} = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$$

$$f_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\mathrm{rot}\,A)_z = B_z$$

$$f_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -(\mathrm{rot}\,A)_y = -B_y$$

$$f_{14} = \frac{\partial A_4}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^4} = -\frac{\partial \phi}{c\partial x} - \frac{\partial A_x}{c\partial t} = \frac{1}{c}\left(-\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial A}{\partial t}\right)_x = \frac{E_x}{c}$$

まとめると、$f_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & \ddots & & \\ f_{31} & & \ddots & \\ f_{41} & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$

反変テンソル $f^{\mu\nu}$ は、$f_{\mu\nu}$ のうち、μ または ν のいずれか一方が4のとき符号を変える。

$$f^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$ と書ける。

$f^{\mu\nu}$、$f_{\mu\nu}$ を用いてMaxwell eqsは、
$$\begin{cases} \partial_\nu f^{\mu\nu} = \mu_0 i^\lambda \\ \partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \end{cases}$$

2つにまとめられる

μ、ν、λ の順

例. $\lambda = 1$ とする

$\partial_1 f^{11} + \partial_2 f^{12} + \partial_3 f^{13} + \partial_4 f^{14} = \mu_0 i^1$ となる

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(-B_y) + \frac{\partial}{\partial(ct)}\left(-\frac{E_x}{c}\right) = \mu_0 i_x$

$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$、$\mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{H}$ より $\left(\mathrm{rot}\,\mathbb{H} - \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}\right)_x = i_x$ と書ける。

$\lambda = 2, 3$ として y, z 成分求まる

よって、$\mathrm{rot}\,\mathbb{H} - \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} = i$ が導出できる。

例2. $\lambda=4$ とする

$$\partial_1 f^{41}+\partial_2 f^{42}+\partial_3 f^{43}+\partial_4 f^{44}=\mu_0 i^4$$

$$\to \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_x}{c}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_y}{c}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_z}{c}\right)+\frac{\partial}{\partial(ct)}(0)=\mu_0 c\rho$$

$\to \mathrm{div}\,\mathbb{E}=\mu_0 c^2\rho$ となる.

$c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$, $\mathbb{D}=\varepsilon_0\mathbb{E}$ より, $\mathrm{div}\,\mathbb{D}=\rho$ となる.

例3. $\lambda=1$, $\mu=2$, $\nu=3$ とする

$$\partial_1 f_{23}+\partial_2 f_{31}+\partial_3 f_{12}=0$$

$$\to \frac{\partial}{\partial x}(B_x)+\frac{\partial}{\partial y}(B_y)+\frac{\partial}{\partial z}(B_z)=0$$

$$\to \mathrm{div}\,\mathbb{B}=0$$

例4. $\lambda=4$, $\mu=2$, $\nu=3$ とする

$$\partial_4 f_{23}+\partial_2 f_{34}+\partial_3 f_{42}=0$$

$$\to \frac{\partial}{\partial(ct)}(B_x)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_z}{c}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{E_y}{c}\right)=0$$

$\to \left(\mathrm{rot}\,\mathbb{E}+\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}\right)_x=0$ となる

$\lambda=4$, $\mu=3$, $\nu=1$ $\to$ y成分

$\lambda=4$, $\mu=1$, $\nu=2$ $\to$ z成分

$\to \mathrm{rot}\,\mathbb{E}+\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}=0$

Lagrange形式によるMaxwell方程式の導出．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + i^{\mu} A_\mu$$ を考える　（Lagrange密度）

$$L = \int \mathcal{L}\, dV$$

$\downarrow$

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbb{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \mathbb{B}^2 + i \cdot \mathbb{A} - \rho\phi$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(-\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A})^2 + i\cdot\mathbb{A} - \rho\phi \qquad (*)$$

変分原理の4次元版．　$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\int \delta\mathcal{L}\, dV dt = 0$　　$dV = dx\,dy\,dz$ 3D.

$\mathcal{L} = \left(A^\mu, \dfrac{\partial A^\mu}{\partial x_i}\right)$ なので．

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{\mu=1}^{4}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu}\delta A^\mu + \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_i}\right)}\delta\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_i}\right)\right\}$$

$$\rightarrow \sum_{\mu=1}^{4}\int_{t_1}^{t_2}\int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_i}\right)}\right\}\delta A^\mu\, dV dt = 0$$

よって．$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_i}\right)} = 0$$

この式から．Maxwell eq を導く．

$A^\mu = A^4 = \dfrac{\phi}{c}$ の場合．

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \sum\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)} = 0$$ となる

$(*) \rightarrow \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\rho$　　$$\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)} = \sum\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 2\cdot\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)\cdot(-1)$$

よって．$$-\rho + \varepsilon_0\sum\frac{\partial}{\partial x_i}E_{x_i} = 0$$

$$\rightarrow \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\mathbb{E} = \rho \quad\rightarrow\quad \mathrm{div}\,\mathbb{D} = \rho$$ となる．

次に、$A^1 = A_1 = A_x$ で変分をとる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x} = i_x \ , \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x_1}\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x_2}\right)} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{1}{2\mu_0}\cdot 2\cdot\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cdot(-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A})_z = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x_3}\right)} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{-\frac{1}{2\mu_0}\cdot 2\cdot\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A})_y = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x_4}\right)} = \frac{\partial}{\partial(-ct)}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial(-ct)}\right)} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 2\cdot\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\cdot(-1)\right\} = -\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

これらより

$$i_x - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B_y}{\partial z} + \varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

まとめると、$\frac{1}{\mu_0}(\mathrm{rot}\,\mathbb{B})_x = i_x + \varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$

A_y, A_z についても同様に行うと、 $\mathrm{rot}\,\mathbb{H} = \mathbb{i} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}$ となる。

$\mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A}$, $\mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi$ とあわせて、4つの Maxwell eqs. がみたされている。

ハミルトン形式によるMaxwell方程式の導出

ψ_i 一般化された座標. π^i 共役な運動量

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \pi^i \dot{\psi}_i - \mathcal{L}$$

$$\pi^i = \cancel{\ \ } = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} \quad \leftarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \text{ と同じ}$$

$H = \int \hat{\mathcal{H}}\, dV$ ハミルトニアン密度.

ψ_i の代わりに. 変数 A_μ を考える $\quad \mu = 4 \longrightarrow A_4 = -\frac{\phi}{c}$

$\mathcal{L}$ には $\dot{\phi}$ が含まれないので. π^i を計算できない.

$\mathcal{L}$ に. $-\frac{1}{2\mu_0}\left(\mathrm{div}A + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 = -\frac{1}{2\mu_0}\left(\partial^\mu A_\mu\right)^2$ を付け加える

ローレンツ不変性保たれている.

$$\mathcal{L}' = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(-\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi\right)^2 - \frac{1}{2\mu_0}\left(\mathrm{rot}\,\mathbb{A}\right)^2 + i \cdot \mathbb{A} - \rho\phi - \frac{1}{2\mu_0}\left(\mathrm{div}A + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2$$

4元ポテンシャル A_μ に共役な運動量 π^μ を求める.

$$\pi^\phi = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\phi}} \overset{-\frac{1}{2\mu_0}\cdot 2(\mathrm{div}A + \varepsilon_0\mu_0\dot{\phi})\,\varepsilon_0\mu_0}{=} -\varepsilon_0\left(\mathrm{div}\,\mathbb{A} + \varepsilon_0\mu_0\dot{\phi}\right) = 0$$

$$\pi^x = \pi_{A_x} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{A}_x} = -\varepsilon_0\left(-\dot{\mathbb{A}} - \mathrm{grad}\,\phi\right)_x = -\varepsilon_0 E_x$$

$$\pi^y = \pi_{A_y} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{A}_y} = -\varepsilon_0\left(-\dot{\mathbb{A}} - \mathrm{grad}\,\phi\right)_y = -\varepsilon_0 E_y$$

$$\pi^z = \pi_{A_z} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{A}_z} = -\varepsilon_0\left(-\dot{\mathbb{A}} - \mathrm{grad}\,\phi\right)_z = -\varepsilon_0 E_z$$

よって. $\mathcal{H} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\pi^2 + \frac{1}{2\mu_0\varepsilon_0^2}\left(\pi^\phi\right)^2 - \left(\pi\cdot\mathrm{grad}\,\phi\right) + \frac{1}{2\mu_0}\left(\mathrm{rot}\,\mathbb{A}\right)^2 - i\cdot\mathbb{A} + \rho\phi$

$$\mathcal{H} = \sum_{\mu=1}^{4} \pi^{\mu} \dot{A}_{\mu} - \mathcal{L} \quad \text{を考える}$$

$$L = \int \cancel{\mathcal{H}}\, \mathcal{L}\, dV$$

$$\delta L = \sum_{\mu} \int \left(\dot{\pi}^{\mu} \delta A_{\mu} + \pi^{\mu} \delta \dot{A}_{\mu} \right) dV \quad \leftarrow \quad L(A_{\mu}, \dot{A}_{\mu})$$

$$= \sum_{\mu} \int \delta\left((\pi^{\mu} \dot{A}_{\mu}) + \dot{\pi}^{\mu} \delta A_{\mu} - \dot{A}_{\mu} \delta \pi^{\mu} \right) dV$$

$$= \delta \int (\mathcal{H} + \mathcal{L})\, dV + \sum_{\mu} \int \left((\dot{\pi}^{\mu} \delta A_{\mu}) - (\dot{A}_{\mu} \delta \pi^{\mu}) \right) dV$$

次に、$H = \int \mathcal{H}(\pi^{\mu}, \nabla \pi^{\mu}, A_{\mu}, \nabla A_{\mu})\, dV$ の変分を考える

$$\delta H = \sum_{\mu} \int \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_{\mu}} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_i} \right)} \right\} \right] \delta A_{\mu} + \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\mu}} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \pi^{\mu}}{\partial x_i} \right)} \right\} \right] \delta \pi^{\mu} \right\} dV$$

よって、

$$\dot{A}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\mu}} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \pi^{\mu}}{\partial x_i} \right)} \right\}$$

$$\dot{\pi}^{\mu} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_{\mu}} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_i} \right)} \right\}$$

Maxwell eqs. を導く.

1°. $A_\mu = A_x$ とする. $\pi^x = -\varepsilon_0 E_x$ を用いて.

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \pi^x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial \pi^x}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial \pi^x}{\partial y}\right)} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial \pi^x}{\partial z}\right)}$$

$$= -E_x - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$ 同様に. y, z成分求まる.

次に.

$$\dot{\pi}^\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)}\right\} = -\rho + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\pi^i\right)$$

$$= -\rho - \frac{\partial}{\partial x}\pi^x - \frac{\partial}{\partial y}\pi^y - \frac{\partial}{\partial z}\pi^z = -\rho + \varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbb{E} = 0$$

よって. $\operatorname{div}\mathbb{D} = \rho$ となる.

2°. $\dot{\pi}^x$ を考える

$$\frac{\partial \pi^x}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial A_x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)}$$

$$= i_x - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$= i_x - \frac{1}{\mu_0}\left(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbb{A}\right)_x$$

ここで, $\pi^x = -\varepsilon_0 E_x$, $\mathbb{B} = \operatorname{rot}\mathbb{A}$, $\mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{H}$ より.

$$\operatorname{rot}\mathbb{H} = i + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}$$ の x 成分となる.

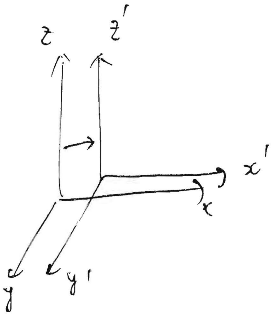
電場と磁場の双対性.

電磁テンソル $f^{\mu\nu}$ について

$$f'^{\mu\nu} = a^{\mu}{}_{\lambda}\, a^{\nu}{}_{\rho}\, f^{\lambda\rho}$$ と変換できる (テンソル)

$$a^{\mu}{}_{\lambda} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad f^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_z \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E^{1\prime} = \gamma(E^1 - vB^2) \\ E^{2\prime} = \gamma(E^2 + vB^1) \\ E^{3\prime} = E^3 \\ B^{1\prime} = \gamma\left(B^1 + \frac{v}{c^2}E^2\right) \\ B^{2\prime} = \gamma\left(B^2 - \frac{v}{c^2}E^1\right) \\ B^{3\prime} = B^3 \end{cases}$$



速度 $\mathbb{v}$ 方向 $\mathbb{E}_{\parallel}$, $\mathbb{B}_{\parallel}$, 垂直方向 $\mathbb{E}_{\perp}$, $\mathbb{B}_{\perp}$

$$\mathbb{E}'_{\perp} = \frac{\mathbb{E}_{\perp} + \mathbb{v}\times\mathbb{B}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \mathbb{E}'_{\parallel} = \mathbb{E}_{\parallel} \rightarrow \mathbb{E}_{\perp} = \frac{\mathbb{E}'_{\perp} - \mathbb{v}\times\mathbb{B}'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\mathbb{B}'_{\perp} = \frac{\mathbb{B}_{\perp} - \mathbb{v}\times\mathbb{E}/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \mathbb{B}'_{\parallel} = \mathbb{B}_{\parallel} \rightarrow \mathbb{B}_{\perp} = \frac{\mathbb{B}'_{\perp} + \mathbb{v}\times\mathbb{E}'/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Coulomb law $\quad \mathbb{E}' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} \dfrac{\mathbb{r}'}{r'} \quad$ (O'系)

O系から見ると.

$$\mathbb{B}_\perp = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{Q\mathbb{v}\times\mathbb{r}'}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r'^3}, \quad \mathbb{B}_{/\!/} = 0$$

電流密度 $\mathbb{j} = Q\mathbb{v}$ より

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\mathbb{j}\times\mathbb{r}'}{4\pi r'^3}$$

十分遅い荷電粒子に対する Biot-Savart law となっている.

次に, O系での静止した一様な $\mathbb{E}$, $\mathbb{B}$

O'系から見ると.

$$\mathbb{E}_\perp' = \frac{\mathbb{E}_\perp + \mathbb{v}\times\mathbb{B}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

O'系 $\quad \mathbb{F}' = Q\mathbb{E}'$

$$\mathbb{F}' = \frac{\mathbb{F}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\Rightarrow \mathbb{F} = Q\mathbb{E} + Q\mathbb{v}\times\mathbb{B}$ Lorentz 力 となる.

ゲージ不変性

$(\mathbb{E}, \mathbb{B}) \rightarrow (\phi, \mathbb{A})$

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \\ \mathbb{B} &= \nabla \times \mathbb{A}\end{aligned}\right)$$ を定義すると

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$
$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} + \nabla \Lambda$$

の下でLは不変となる。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - q\phi(t, r) + q\dot{r}\cdot\mathbb{A}(t, r)$$ を考える

ゲージ変換の下で

$$L \longrightarrow L + q\left(\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(t, r(t)) + \frac{dr(t)}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial r(t)}\Lambda(t, r(t))\right)$$ と変化する

$$\longrightarrow L + \frac{d}{dt}\left(q\Lambda(t, r(t))\right)$$ とまとめられる。

始点終点を固定した作用積分に表れない。

$$H = \sum_i p_i \dot{r} - L$$
$$= \frac{1}{m}p(p - eA) - \left(\frac{1}{2m}(p - eA)^2 + \frac{q}{m}(p - eA)A - q\phi\right)$$

また、$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + qA$ より

$$H = p\cdot\dot{r} - L = \frac{1}{2m}(p - qA)^2 + q\phi$$ となる。

Lagrange eq. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r} + qA) + q\nabla\phi - q\nabla(\dot{r}\cdot A) = 0$

$\dot{\mathbb{r}} \times \mathbb{B} = \nabla(\dot{\mathbb{r}}\cdot\mathbb{A}) - (\dot{\mathbb{r}}\cdot\nabla)\mathbb{A}$ を用いる。

$$\begin{aligned}m\ddot{r} &= \underbrace{-q\nabla\phi} + q\nabla(\dot{\mathbb{r}}\cdot A) - q\frac{dA}{dt} \\ &= \underbrace{q\left(\mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right)} + q\left\{\dot{\mathbb{r}}\times\mathbb{B} + (\dot{\mathbb{r}}\cdot\nabla)\mathbb{A}\right\} - q\frac{dA}{dt} \\ &= q(\mathbb{E} + \dot{\mathbb{r}}\times\mathbb{B})\end{aligned}$$

電磁場中の運動方程式となる